Algebra erwerben und besitzen

Eine binationale empirische Studie
in der Jahrgangsstufe 5

Tatjana Berlin
geboren in St. Petersburg

D i s s e r t a t i o n
zum Erwerb des Grades Dr. rer. nat.

vorgelegt bei der Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
März 2010

Erstgutachterin: Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen
Zweitgutachter: Prof. Dr. Götz Krummheuer
Fachbereich Informatik und Mathematik, Universität Frankfurt am Main

Datum der mündlichen Prüfung: 21.06.2010

Γνῶθι σεαυτόν

Danksagung

Bei allen, die meine Studie unterstützend begleitet haben und auf das Zustandekommen dieser Arbeit positiven Einfluss genommen haben, möchte ich mich herzlich bedanken.

Allen voran gilt mein ganz besonderer Dank Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker, die den Grundstein für diese Arbeit legte, indem sie mich durch ihre eigenen Forschungsinteressen und ihre Art und Weise, wissenschaftliche Fragen zu verfolgen, begeisterte und motivierte. Sie hat sowohl die Durchführung der Studie ermöglicht als auch durch ihre kompetenten Literaturhinweise und ihre Diskussionsbereitschaft sowie durch ihre ideenreichen Anregungen während des gesamten Forschungsprozesses wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen. Besonders danken möchte ich ihr für die Freiräume, die sie mir gewährte und mir es somit ermöglichte, die Studie auf eigenen Wegen zu entwickeln und mit einem eigenen Profil zu versehen. Auch für ihr andauerndes Vertrauen in meine Kräfte und in das Gelingen dieser Arbeit danke ich ganz herzlich. Ich habe meine Doktorandenzeit in einer Atmosphäre von Vertrauen, Offenheit und wissenschaftlichem Diskurs sehr genossen.

Mein tief empfundener Dank richtet sich auch an alle Kolleginnen und Kollegen des Forschungsgebiets Mathematikdidaktik an der Universität Duisburg-Essen. Dr. Astrid Fischer und Dagmar Melzig standen mir in den gemeinsamen Sitzungen mit Prof. Dr. Hefendehl-Hebeker durch Überlegungen, anregende Gespräche und fachliche Hinweise stets bei. Wertvolle Unterstützung und kritische Anregungen erhielt ich auch im Rahmen des didaktischen Forschungskolloquiums in Essen. Dr. Christoph Ableitinger, Angela Herrmann und Dagmar Melzig waren so freundlich, in der Endphase der Arbeit das Manuskript Korrektur zu lesen.

Ein großer Dank geht an meine Freundin Dr. Anna Pratoussevitch für die zahlreichen motivierenden Gespräche, den Erfahrungsaustausch und ihre hilfreichen fachlichen Anregungen.

Ich bedanke mich außerordentlich bei meiner Freundin Erika Eggen für ihre wertvollen Ratschläge und ihr hochqualifiziertes Coaching in Fragen der Interviewtechniken.

Der empirische Teil der Arbeit wäre ohne die Unterstützung von vier Gymnasien in Essen (Deutschland) und St. Petersburg (Russland) nicht möglich gewesen.

Mein Dank gilt allen Lehrkräften, die an den für die Studie relevanten Unterrichtsaktivitäten beteiligt waren. Besonders erwähnen möchte ich an dieser Stelle Regina Klockenbusch, die meine Arbeit als Lehrerin einer der beteiligten fünften Klassen und auch als eine ständige Gesprächspartnerin und Ideenstifterin begleitete. Zum Gelingen der Studie haben die Kinder wesentlich beigetragen, die freiwillig an den Interviews teilgenommen haben. Die positive Einstellung aller Probanden und ihre Bereitschaft, eigene Gedanken, Lösungswege, aber auch Zweifel und Unsicherheit offenzulegen, haben es mir ermöglicht, Einblicke in die Sichtweisen der Kinder beim Aufgabenlösen zu gewinnen. Des Weiteren gilt mein Dank allen freiwilligen Helfern (Schülern und Studenten), die mich bei Videoaufnahmen von Interviews an deutschen und russischen Gymnasien technisch unterstützt haben.

Ein herzlicher Dank geht an zwei meiner persönlichen Freundinnen. Tatjana Schkalova hat sich um die Organisation und die umfassende Begleitung der Untersuchungen in St. Petersburg gekümmert. Simona Laevskaia, deren bewährte Freundschaft mich über die Jahre hinweg begleitet, hat mich auch während des Verfassens dieser Arbeit immer wieder aufgemuntert.

Der größte Dank gilt meiner Familie, die mich menschlich und fachlich großartig unterstützt hat. Meinem Sohn Eugen Berlin danke ich von ganzem Herzen für seinen über das Technische hinausgehenden Einsatz während der gesamten Studie – von den Videoaufnahmen der Interviews bis hin zum Layout des Manuskripts – sowie für seine fortlaufende Begleitung und Betreuung in sämtlichen Fragen des IT-Bereiches. Meiner Tochter Vera Berlin danke ich für die durchgehende Unterstützung und insbesondere für ihre Hilfe bei der Anfertigung der Interviewtranskripte sowie für ihre stilistischen Vorschläge beim Verfassen des Manuskripts. Meinem geliebten Mann Wadim Berlin bin ich dankbar für seine Kraft, Geduld, Liebe und sein unerschütterliches Vertrauen in mich, die mich in all den Jahren begleiten und stärken. Er war und ist für mich wie ein beständiger Fels in der Brandung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

Was du ererbt von deinen Vätern hast,
Erwirb es, um es zu besitzen.
Was man nicht nützt, ist eine schwere Last,
Nur was der Augenblick erschafft, das kann er nützen.

Johann Wolfgang von Goethe

Es existieren Schwierigkeiten beim Erlernen von Algebra. Und das weltweit. Darüber berichten sowohl Stimmen aus der Schulpraxis als auch viele Untersuchungen im Rahmen der mathematikdidaktischen Forschung. Daher ist zu allererst ein diagnostischer Blick erforderlich: Wo liegen die Ursachen?

Die Frage nach den Ursachen der Schwierigkeiten von Schülern mit der Einführung der symbolischen Algebra kann man differenzierter betrachten:

1. *Liegt es an der Sache selbst – zu schwer?*

   Die Algebra in ihrer heutigen Form ist durch die Idee der Formalisierung geprägt. Diese ist ein kultureller Hochpunkt mit einer langen Entwicklungsgeschichte, der sowohl historisch betrachtet als auch für heutige Lernende mit besonderen geistigen Herausforderungen verbunden war und ist.

2. *Liegt es an der Art der Einführung – zu schnell?*

   Traditionell beginnt die „Buchstabenalgebra“ mit der Einführung von Variablen in Klasse 7. Die Schüler erhalten wenig Zeit, sich an diese neuen Darstellungsmittel zu gewöhnen und sie als sinnhaft zu erfahren. Die Unterrichtsaktivitäten verlagern sich schnell auf ein regelhaftes Operieren mit vorgegebenen Symbolen sowie das Aufstellen und Umformen von Termen und Gleichungen zum Lösen von Textaufgaben.

3. *Liegt es an den Anforderungen - zu viel und zu streng?*

   Die traditionelle Vorgehensweise führt zu einer Häufung von Problemen und Schwierigkeiten, da zugleich neue Darstellungmittel und deren Anwendung in Situationen mit einem eigenen Problemgehalt und eigenen Schwierigkeiten bewältigt werden müssen. Dabei wird oft allein der Algebra die Schuld für das generelle Scheitern an einer Aufgabe zugeschrieben. Andererseits steht bei der Bewertung von Schülerlösungen im Mathematikunterricht häufig die fehlerhafte äußere Form der symbolischen Notation im Vordergrund, ohne dass die sich eventuell dahinter verbergende Lösung des Problems anerkannt wird. Das alles hat zur Folge, dass Schüler [1] generell den Mut verlieren, sich mit Mathematik zu beschäftigen.

4. *Liegt es an dem Zeitpunkt der Einführung - zu spät?*

   Die intensive Behandlung der Algebra beginnt erst in der Jahrgangsstufe 7, was einem Alter von 12 – 13 Jahren entspricht. In diesem Alter befinden sich die Schüler mitten in der Pubertät: der Körper verändert sich, das Heranwachsen ist mit Ängsten und Zweifeln verbunden, plötzlich kommt man mit sich selbst und seiner Umwelt nicht mehr klar. Und gerade zu diesem Zeitpunkt wird von den Lernenden eine enorme Leistung verlangt: sie müssen sprunghaft einen großen Entwicklungsschritt meistern. Es wäre interessant zu untersuchen, ob eine frühere Einführung der Algebra möglich ist und die Idee der Formalisierung in altersgerechter Form schon in der Jahrgangsstufe 5 von den 10-jährigen Kindern angenommen werden kann, und ob damit ggf. der intelektuellen Entwicklung der Kinder besser Rechnung getragen und zugleich der Pubertätsdruck umgangen würde.

Die oben genannten Fragen und Überlegungen waren die Beweggründe für die Durchführung einer binationalen Studie in Deutschland und Russland mit der übergeordneten Intention: Wie kann den Lernenden auf dem Weg zur Algebra geholfen werden? Der binationale Ansatz der Studie verfolgt das Ziel, interkulturelle Invarianten und Unterschiede beim Algebralernen in der Einführungsphase festzustellen. Die hier vorliegende Arbeit ist der zugehörige Forschungsbericht.

[1] Um die Leserlichkeit der Arbeit nicht zu beeinträchtigen, werden durchgängig die maskulinen Formen von „Schüler“ und „Lehrer“ verwendet. Gemeint sind damit jeweils sowohl Schülerinnen als auch Schüler sowie Lehrerinnen und Lehrer.

Forschungsanliegen

Es gibt in der Mathematikdidaktik eine Vielzahl an Untersuchungen, die sich mit dem Algebralernen in der Schule beschäftigen. Im Fokus der Beobachtungen steht vor allem entweder der reguläre Algebraunterricht unter dem Aspekt des Interaktionsgeschehens oder die durch schriftliche Tests erhobenen Leistungen und Defizite der Kinder. Die vorliegende Arbeit dagegen ist ein Versuch, den Kindern in direkten Gesprächen (Interviews) aufmerksam zuzuhören und ihre Wahrnehmungen, Deutungen und Schwierigkeiten bei den ersten Begegnungen mit der Algebra – und in erster Linie mit dem Variablenbegriff – zu verstehen.

Ausgangspunkt des Forschungsanliegens bilden zwei berühmte Thesen von Wygotski. Die eine betrifft die *Zone der nächsten Entwicklung* als Ausdruck des Gedankens, dass ein Kind das, was es heute mit Hilfe Erwachsener tut, morgen selbständig wird vollbringen können: „Die Differenz zwischen dem Niveau, auf dem die Aufgaben unter Anleitung, unter Mithilfe der Erwachsenen gelöst werden, und dem Niveau, auf dem das Kind die Aufgaben selbständig löst, macht die Zone der nächsten Entwicklung aus“ (Wygotski, 1934b, 300). Die andere These Wygotskis betrifft die *Entwicklung von Begriffen.* Anhand seiner Untersuchungen zur Begriffsbildung im Kindesalter gelangte Wygotski (1934a) zu der Auffassung, dass die Begriffe sich behutsam entwickeln, und dass dieser Prozess eine aktive gedankliche Konstruktion des lernenden Individuums erfordert.

Zielsetzung der Studie

In der Mathematikdidaktik wird breit diskutiert, wie Algebra im Mathematikunterricht eingeführt werden soll. Eine der vorherrschenden Meinungen fordert, dass die Symbolisierung von Anfang an in Situationen eingeführt werden sollte, in denen Schüler die Stärke der Algebra und das Potenzial der formalen Sprache zu schätzen lernen (Arcavi, 1994, 33). Beim Beobachten und Beschreiben von Strukturen werden algebraische Symbole nicht als nur rein formal, sondern vor allem als bedeutungstragende Mittel der Generalisierung und des Erkenntnisgewinns erfahren.

Geometrische Figurenfolgen bilden eine gute intuitiv-anschauliche Grundlage, um die ihnen innewohnenden Muster zu erkennen und fortzusetzen – handelnd mit konkretem Material, zeichnerisch oder in Gedanken. Die wachsende Anzahl der Bauteile führt zwingend auf eine Zahlenfolge, deren Bauprinzip dem der Figurenfolge entspricht. Dies kann man durch eine allgemeine Regel beschreiben und mit algebraischen Mitteln symbolisch darstellen. So gelangt man vom Bauplan zur Formel.

Die Studie widmet sich der Frage, auf welche Art und Weise sich die Schüler die algebraische Symbolik zu eigen machen. Somit umfasst die Forschungsperspektive der vorliegenden Arbeit zwei wesentliche Schwerpunkte: die Erfassung des *aktuellen Entwicklungsniveaus* und *der Zone der nächsten Entwicklung* von Kindern der fünften Klassenstufe in Bezug auf den Aspekt der Formalisierung.

Auf der Grundlage des erhobenen Datenmaterials werden

1. die Entwicklungsstufen des algebraischen Denkens der Kinder in unterschiedlichen situativen Kontexten verfolgt und analysiert,
2. Entwicklungsstadien im Bildungsprozess des Variablenbegriffs festgestellt und die darin auftretenden Hindernisse spezifiziert und
3. Hypothesen zur Unterstützung des Entwicklungsverlaufs des algebraischen Denkens und zum Abbau von Hindernissen generiert.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 1 werden die theoretischen Grundlagen der Arbeit gelegt, indem unterschiedliche Aspekte des Algebralernens aus der mathematikdidaktischen Forschung erläutert werden. Zunächst werden allgemeine Überlegungen zu der algebraischen Formelsprache und der Bedeutung von Variablen wiedergegeben, bevor anschließend Lernen und Lehren der Schulalgebra aus epistemologischer Perspektive betrachtet werden. Dabei werden Begriffe und Bezeichnungen erläutert, die in dieser Arbeit verwendet werden, um in der Studie beobachtete und untersuchte Phänomene zu beschreiben. Darüber hinaus werden Aspekte der Begriffsbildung im Lernprozess behandelt. Den Abschluss dieses Kapitels bilden Überlegungen zur Verbindung von Arithmetik und Algebra, die für die Analysen in der vorliegenden Arbeit zentral sind, sowie Erläuterungen von verschiedenen Zugängen zur Algebra.

Im 2. Kapitel wird das Design der Untersuchung dargestellt. Neben methodologischen Aspekten wird der Aufbau der Studie beschrieben sowie die Konzeption und der Einsatz der in der Studie verwendeten Aufgaben dargelegt. Dabei wird unterschieden zwischen Aufgaben für die zwei Untersuchungsphasen und solchen für die dazwischen liegenden Unterrichtsaktivitäten. Anschließend werden die Methoden der Datenerhebung und die Auswahl des empirischen Materials näher erläutert und ausführlich die drei Instrumente zur Analyse der Interviews dargestellt.

Kapitel 3 befasst sich mit der Analyse von Daten der Untersuchungsphase I, die die Rolle einer empirischen Vorstudie einnimmt. In dieser Phase der Untersuchung wurden Interviews mit Fünftklässlern durchgeführt, in denen Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in artihmetischen und geometrischen Kontexten zu erkennen und zu beschreiben waren. Als Grundlage dazu dienten die zuvor entwickelten und in Kapitel 2 vorgestellten Aufgaben.

Gegenstand des 4. Kapitels ist die Durchführung und Auswertung der Untersuchungsphase II, die als empirische Hauptstudie konzipiert wurde. Zunächst werden Einzelfallstudien mit drei ausgewählten Probanden dargestellt, wobei die Bearbeitungen zu allen drei Aufgaben analysiert und verglichen werden. Die vergleichenden Analysen der gesamten Stichprobe bieten einen Überblick über Vorgehensweisen, Notationen und Herausforderungen der für die binationale Studie interviewten Fünftklässler.

Im abschließenden Kapitel 5 werden die zentralen Ergebnisse der Studie zusammengefasst. Nach Diskussion der Ergebnisse der empirischen Untersuchung und der Erstellung von Hypothesen werden Konsequenzen für die Lehrerausbildung und den Mathematikunterricht gezogen.

Kapitel 1

Allgemeine Grundlagen

Die didaktische Forschung zur Schulalgebra wird in diesem Kapitel insoweit entfaltet, als sie es erlaubt, für die vorliegende Arbeit relevante theoretische Überlegungen zu diskutieren.

1.1 Die Algebraische Formelsprache

„Among other things, algebra represents something like a mathematical language, a sign language“ (Steinbring, 2005b, 91). Im folgenden Kapitel wird insbesondere dieser Aspekt der Schulalgebra – Algebra als Zeichensprache, als Formelsprache – im Fokus der Betrachtung stehen.

1.1.1 Die algebraische Formelsprache aus geschichtlicher Perspektive

In der Geschichte der Algebra ist eine lange Entwicklung zu beobachten. Sie wird von Historikern in drei Perioden unterteilt: die rhetorische, die synkopische und die symbolische (vgl. Harper, 1987, 77).

Die *rhetorische Phase* beschränkte sich auf das Lösen von Gleichungen mit unbekannten Größen . Diese unbekannten Größen wurden mit Begriffen wie „Umfang“ oder „Haufen“ bezeichnet; es wurde mit ihnen gerechnet, als ob es sich um bekannte Zahlen handelte. Dieses „Rechnen-als-ob“ wird als entscheidender Schritt für die Ausbildung des Variablenbegriffs betrachtet. Darüber hinaus wurde nicht symbolisch gerechnet, sondern die Berechnungen erfolgten exemplarisch. Die Problemstellung selbst wurde verbal formuliert.

Mit Diophant begann die sogenannte *synkopische Phase*. Diophant arbeitete mit verkürzten Notationen, welche jedoch nichts anderes als Abbreviaturen waren: „Abkürzungen für etwas, das im Prinzip auch ohne den Gebrauch dieser Zeichen gegeben ist“ (Krämer, 1988, 38). Diophants Abkürzungen standen weiterhin für unbekannte, aber nicht veränderliche Größen oder variable Koeffizienten. Das heißt, dass der Variablengebrauch bei Diophant auf den Aspekt des Unbekannten beschränkt blieb. Da die Algebra jedoch noch nicht auf das „Instrument eines formalen Gebrauches von Symbolen zurückgreifen konnte, mit dessen Hilfe überhaupt erst allgemeingültige Sätze über die Algebra formuliert werden können“ (Krämer, 1988, 39), fehlte es Diophants Lösungen laut Krämer an methodischer Durchsichtigkeit.

In den Phasen der *rhetorischen* und *synkopischen Algebra* wird ein bestimmter Grad an Standardisierung sichtbar. Es ging hier primär um das Lösen von Gleichungen. Lösungsverfahren wurden mit einem numerischem Beispiel veranschaulicht, welches dann durch einfache Ersetzung der Zahlen für ein neues Problem herangezogen werden konnte. Eine Vielfalt an allgemeinen Methoden zur Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen war entstanden. Mangels einer passenden Sprache zur Repräsentation bestimmter, aber unbekanter Zahlen war es jedoch immer noch kompliziert, das Verfahren leserlich niederzuschreiben, denn die Verwendung von Variablen statt Zahlen kam nur in einigen wenigen Einzelfällen zur Anwendung. Die synkopische Notation vermochte es nocht nicht, Algebra auf das höhere Level der Generalisierung zu bringen.

Eine sensationelle Änderung in der Mathematik war die Schaffung der *symbolischen Algebra* (vgl. Rojano, 1996, 59). Die Verwendung von Buchstaben und anderen Symbolen (Viète, Descartes) läutete eine der größten kulturellen Errungenschaften ein, nämlich die Schaffung der symbolischen algebraischen Sprache, begleitet durch die Verbreitung symbolischen Denkens (vgl. Radford & Puig, 2007, 145). Nie zuvor war die Menschheit fähig gewesen, eine autonome, spezifisch mathematische Sprache zu schaffen, in der es nicht nur möglich war, Probleme und Lehrsätze zu formulieren, sondern auch die Schritte der Lösung und des Beweises auszudrücken. Die Herausbildung der Idee des „operativen Symbolgebrauches“ bezeichnet Krämer (1988, 176) als den Scheitelpunkt in der Geschichte der Formalisierung. Die Erfindung der Buchstabenalgebra ermöglichte einen schematischen, interpretationsfreien Umgang mit schriftlichen Symbolen und somit die „Entlastung“ (ebd.) des Verstandes von den Mühen der Interpretation. „Erst am Ende einer Rechnung macht man sich Gedanken über Interpretation des Ergebnisses und mögliche Beschränkungen seiner Gültigkeit“ (Jahnke, 1999, 169). Insofern spricht man von der „Allgemeinheit der Algebra“ (ebd.).

Der Bezug zur vorliegenden Arbeit

Für die vorliegende Arbeit sind zwei Aspekte der Entwicklung der Mathematik wesentlich: der historisch-genetische und der soziokulturelle.

Da die Mathematikgeschichte die Genese mathematischer Aspekte – ihre Ursprünge und ihre Weiterentwicklung – offenbart, kann sie Ansatzpunkte aufzeigen, wo Lernende „in den Lernprozess der Menschheit einsteigen können“ (Freudenthal, 1983, ix). Der historisch-genetische Aspekt spielt für die vorliegende Arbeit eine große Rolle. Es stellt sich die Frage, inwieweit sich die oben genannten historischen Etappen der Entwicklung der Algebra in der individuellen Genese der Probanden erkennen lassen.

Es wird in den letzten Jahren in der Mahtematikdidaktik in den Blick genommen, dass Mathematik in einer Gemeinschaft von Forschenden entsteht und durch deren Praktiken und Sichtweisen beeinflusst ist. Der historisch-genetische Aspekt wird also durch einen soziokulturellen Aspekt erweitert. Radford z. B. sieht Mathematik „as a semiotic manifestation of the culture in which mathematics is practised“ und folgert daraus, dass die Rolle der Symbolisierung im algebraischen Denken „needs to be studied through the social meaning of algebra and through the different forms of symbolisation that the culture under consideration uses to symbolise its objects“ (vgl. Radford, 2001, 13f.). Es stellt sich die Frage, ob es spezifische Unterschiede bzw. Invarianten zwischen den deutschen und den russichen Kindern gibt, was den soziokulturellen Aspekt betrifft.

Für die vorliegende Arbeit ist an der oben geschilderten Entstehungsgeschichte des operativen Symbolgebrauchs die Botschaft wesentlich, dass die Idee der Formalisierung bestimmte Denkhandlungen verlangt und mit der schrittweisen Herausbildung der Begriffe – vor allem des Variablenbegriffs – verbunden ist. Es stellt sich die Frage, ob die Spuren solcher soziokulturellen Prozesse auch bei konkreten Individuen nachweisbar sein können.

1.1.2 Zur Bedeutung von Variablen

Der Variablenbegriff stellt einen fundamentalen Begriff der Mathematik dar: „Er ist fundamental für die Denkweise der Mathematik und für die Seinsweise ihrer Gegenstände“ (Jahnke, 1995, 122). Variablen sind zentrale Darstellungsmittel der modernen Algebra. Das Wort *Variable* kommt von dem Lateinischen *variabilis*, was so viel wie veränderlich heißt. Aufgrund seiner Allgemeinheit lässt sich der Variablenbegriff schwerlich vollständig in einer Definition erfassen. In der einschlägigen mathematischen Literatur wird der Begriff der Variablen oftmals nur verwendet; Definitionsversuche heben in der Regel nur bestimmte Aspekte des Variablenbegriffes hervor (vgl. Arcavi & Schoenfeld, 1988, 421ff.).

Es gibt drei große Verwendungsweisen von Variablen: als Unbekannte in Gleichungen, als Veränderliche in der Darstellung von Funktionen und als „allgemeine Zahl“ in Formelausdrücken. Historisch stand am Anfang die Verwendung als Unbekannte, erst durch Hinzunahme anderer Verwendungsweisen konnte der entscheidende Durchbruch erzielt werden. Das hat die Folge, dass der Variablenbegriff ein sehr weit gefasster Begriff ist, weshalb in der didaktischen Fachliteratur auf dessen Aspektfülle hingewiesen wird.

Mormann (1981, 71) hebt den Doppelcharakter des Variablenbegriffs hervor: Einerseits kann man eine Variable unter formalen oder syntaktischen Aspekten betrachten, dann ist sie eine Leerstelle und tritt in der Rolle eines Platzhalters auf, in welchen andere Ausdrücke – u. a. Zahlen – eingesetzt werden können. Dieser Aspekt des Variablenbegriffs wird als „Einsetzungsaspekt“ bezeichnet. Andererseits kann man eine Variable unter einem „Gegenstandsaspekt“ auffassen, d. h. als Stellvertreter eines unbekannten, noch zu bestimmenden gegenständlichen Objektes. Arcavi & Schoenfeld (1988, 421f.) weisen darauf hin, dass die mathematische Bedeutung oftmals vom Kontext und der wissenschaftlichen Fachrichtung, in dem die Variable zur Anwendung kommt, bestimmt wird.

Die Aspektfülle des Variablenbegriffs kann im Mathematikunterricht nicht auf einmal erarbeitet werden, es muss ein Einstieg gewählt werden. In der durchgeführten Studie wurde auf die zwei Verwendungsweisen von Variblen als „veränderliche“ bzw. als „allgemeine Zahl“ eingegangen. Diese beiden haben gemeinsam, dass die Variable in der Funktion des Generalisierers zur Beschreibung von Allgemeinheit verwendet wird: „Variables are a formal tool in the service of generalization“ (Arcavi & Schoenfeld, 1988, 423).

1.1.3 Zeichen als Erkenntnismittel und als Diagramm

Weil Variablen durch Symbole repräsentiert werden, haben sie auch einen Zeichen-Charakter oder Objekt-Charakter. Semiotische Theorien erzielen Einigkeit darüber, dass Zeichen grundsätzlich Mittel sind, um ein Objekt zu kennzeichnen, oder Mittel, welche man benutzt, um für jemanden etwas darzustellen (vgl. Hoffmann, 2005, 45).

Wygotski untersuchte die Prozesse des Entstehens und Entwickelns der wissenschaftlichen Begriffe im Kindesalter und betonte, dass die Verwendung von Zeichen – auch Worte können als Zeichen gesehen werden – eine zentrale Rolle für den Prozess des Entstehens von Begriffen spielt. Dabei werden Zeichen und Worte als Instrumente genutzt, um das Denken zu steuern und zu kontrollieren. Wygotskis Ansatz über die Rolle von Zeichen kann demnach als mittelbezogen und instrumentalistisch charakterisiert werden (vgl. Seeger, 2005, 68). Die Verwendung von Zeichen als Instrumente bezeichnet Wygotski als „höhere psychologische Funktionen“, durch die sich Menschen von Tieren unterscheiden. Seine Hauptidee besteht darin, dass das Zeichen in seiner Rolle als mächtiges Instrument die Psyche des Menschen von einer natürlichen biologischen, in eine kulturelle und soziale umwandelt und dabei eine vermittelnde Rolle zwischen Denken und Handeln einnimmt. Damit wurde das herrschende Schema „S – R“, das die Beziehung zwischen einem Stimulus (S) und einer Reaktion (R) darstellte, durch ein neues Schema „S – S – R“ ersetzt. Der in der Mitte stehende Buchstabe S (Sign) repräsentiert hier ein Zeichen, das als Vermittler zwischen dem Objekt der Außenwelt (Stimulus) und der Aktivität des Subjekts (Reaktion) fungiert.

Durch die Prozesse, in denen Zeichen und Relationen zwischen Zeichen als Mittel des Denkens, Lernens und Verstehens fungieren, werden nach Wygotski Fortschritte im Lernen möglich. Bei der Bestimmung von Zeichen und Relationen zwischen Zeichen besteht das grundsätzliche Problem darin, dass einerseits Objekte durch mehrere unterschiedliche Zeichen repräsentiert werden können, andererseits können die jeweiligen Zeichen situationsabhängig verschieden interpretiert werden.

Im Gegensatz zu Wygotski hat sich Peirce primär nicht für die Rolle von Zeichen als Instrument des Denkens und den dadurch sich ausgelösten Entwicklungsprozess interessiert, sondern für Aspekte des Zeichengebrauchs. Er erarbeitete das Konzept des „diagrammatischen Denkens“, laut dem die Entwicklung des Wissens auf der Grundlage einer dreistufigen Tätigkeit erklärt werden kann: das Konstruieren von

Darstellungen (Diagramme), das Experimentieren mit ihnen und das Beobachten der Ergebnisse (vgl. Hoffmann, 2005, 45). Für Peirce ist jedes Zeichen oder Symbol eine Art von Diagramm: „Any symbol in itself always already constitues a proto-diagram“ (Stjernfelt, 2000, 368).

1.2 Lernen und Lehren der Schulalgebra aus epistemologischer Perspektive

Lernen ist ein Prozess der persönlichen Auseinandersetzung mit einem Thema, der an vorhandenen Wissensbeständen und individuellen Befindlichkeiten anknüpft. Deshalb ist es nicht nur von der zur lernende Sache geprägt, sondern auch von individuellen Herangehensweisen und Formen der Auseinandersetzung (Denken und Verstehen) mit dem Thema. Aus diesem Grunde verhandeln wir in diesem Unterkapitel Begriffe, die helfen, diese Prozesse zu beschreiben.

Seit der Antike beschäftigt die Wissenschaft die Frage, was Wissen, Einsicht, Wahrheit ist, und insbesondere die Frage nach unzweifelhaft gesichertem *Wissen* in Abgrenzung zur bloßen *Meinung* eines Menschen. Nach Aristoteles besteht Wissen aus einem System von logisch strukturierten Sätzen. Eine Idee, eine These unterliegt einer Prüfung in der Kommunikation, im argumentierenden Dialog. Da viele Wissenschaften – unter anderem sind Philosophie, Kognitionspsychologie, Kommunikationssoziologie und Fachdidaktiken zu nennen – sich mit diesem umfangreichen Thema auseinander setzen, werden in der Fachliteratur sowohl viele fachspezifische als auch alltägliche Begriffe verwendet, die weit auseinandergehen und meist nicht eindeutig definiert sind. Im Folgenden werden die für die vorliegende Arbeit wesentlichen Begriffe aus der Sicht der Philosophie [1] und der Mathematikdidaktik erläutert.

Habitus

Ein Mensch ist mit Entscheidungsfreiheit gekennzeichnet und kann prinzipiell in jeder Situation beliebig unterschiedlich agieren. Es existieren jedoch relativ feste

[1] In seinem Buch „Der Begriff des Arguments“ stellt Wohlrapp (2008) die Theorie des Arguments auf eine philosopische Grundlage und arbeitet die dafür benötigten Begriffe in ihren Zusammenhängen heraus.

Muster und Schemata innerhalb der eigentlich freien Entfaltungsmöglichkeiten eines Menschen, ausgeprägt im Verhalten, Denken, Reden und demzufolge auch im Argumentieren. Dieser persönliche Stil – schon Aristoteles hatte dafür einen Begriff (Hexis) – bildet sich in Auseinandersetzung mit natürlichen und kulturellen Lebensumständen und äußert sich u. a. in der Körperhaltung, im Sprachduktus, in den Denkweisen. Seit Beginn des 20. Jahrhunderts ist der Ausdruck „Habitus“ im Gebrauch. Damit wird eine Art musterhafter Verhaltensstabilität bei Einzelpersonen, also „ein Kleid aus Gewohnheiten“ bezeichnet (vgl. Wohlrapp, 2008, 158). Da der Habitus etwas Entstandenes und nicht Vorherbestimmtes, Definiertes ist, lässt er Veränderungen zu. Mithilfe des Habitus-Begriffs können für die Argumentationsanalyse einige nützliche Termini gebildet werden, wie etwa die *Sichtweise* und die *Perspektive*.

Sichtweise und Perspektive

Der Ausdruck *Sichtweise* bezeichnet hier die spezifische, habituell stabilisierte Innensicht, in der das Subjekt alles, mit dem es zu tun bekommt, in die ihm entsprechenden Formen bringt. Die Sichtweise ist nicht objektivierbar, das bedeutet, dass ein Mensch seine eigene Sichtweise nicht ohne weitere Denkhandlungen erkennen kann. Anders im Auge eines Außenbetrachters: „Der andere Mensch, das andere Subjekt, ist in der Lage, beim Gegenüber die Weise des Sehens, Erlebens, Denkens, Verarbeitens wirklich als etwas Gegenständliches vor sich zu haben und zu beurteilen. Hier erscheint also dann die Sichtweise in der Außenbetrachtung, und um das zu markieren, sollte ein anderes Wort zur Verfügung stehen. Ich verwende dafür *Perspektive*. Die Perspektive ist also die „Sichtweise beim anderen“ (Wohlrapp, 2008, 159).

Das Orientierungssystem

Das Streben nach Wissen liegt für Aristoteles in der Natur der Menschen. Wissen bestünde – in Abgrenzung zur sinnlichen Gewissheit und Erfahrenheit, die ein Phänomen feststellen und damit die Frage „Was“ beantworten kann – darin, dem „Warum“ der Phänomene und Zustände auf den Grund zu gehen. Eine natürliche Neugier kann allerdings auch bei Tieren beobachtet werden. Menschen dagegen zeigen die Fähigkeit, sich über einen Zustand des naturgemäßen Verhaltens wie z. B. Saugen, Krabbeln und das Erproben von Gegenständen, heraus zu entwickeln und zu handeln. Damit ist gemeint, dass Menschen sich Ziele setzen, die nicht mehr als Reaktionen auf äußere Reize erklärt werden können. Für die Verwirklichung dieser Ziele werden Orientierungen, also Theorien gebraucht, „welche [die] für das Handeln relevanten Unterscheidungen, Beziehungen und Regelmäßigkeiten symbolisch darstellen. Sie werden wirklich gebraucht (nicht nur gewünscht), und insofern entsteht auch ein Bedürfnis nach ihnen, welches dann nicht mehr zur Natur, sondern zur Kultur des Menschen gehört“ (Wohlrapp, 2008, 163). So kann ein Wissensstreben als Bedürfnis nach *Orientierungen* im Handeln verstanden werden, welches ein Bestandteil der Selbsterkenntnis ist. Das Bemühen um Selbsterkenntnis stellte schon für Platon ein Kernthema seiner Überlegungen zu einer der Inschriften, die am Eingang des Tempels von Delphi angebracht gewesen sein soll, nämlich: „Gnothi seauton“ (Erkenne dich selbst).

Behaupten. Begründen. Argumentieren

Angesichts einer bedeutenden Frage oder eines Problems, mit dem sich ein Mensch beschäftigt, stößt er oftmals auf die Begrenztheit seiner Orientierungen. Daraufhin beginnt er, an dieser Grenze zu forschen und bringt eine These hervor, mit der die Grenze seiner Orientierung theoretisch überschritten wird. Zugleich stellt sich die Frage nach dem Geltungsanspruch seiner These, die im anschließenden Dialog mit einem kritischen Gesprächspartner auf ihre Haltbarkeit hin überprüft wird. „Das ist der Eintritt in die Argumentationspraxis“ Wohlrapp (2008, 185).

Bei der Betrachtung der Argumentationspraxis treten stets die zwei relevante Sprachhandlungselemente zu Tage: Behaupten und Begründen. Behaupten stellt das Anführen einer Aussage dar, welche eine Orientierungsgrenze überschreitet und damit eine neue Orientierung bilden soll. Es ist üblich, Behaupten als Äußerung des „Fürwahrhaltens“ zu verstehen. Kant (1968, 689) unterscheidet drei Stufen des „Fürwahrhaltens“, oder der subjektiven Gültigkeit des Urteils in Beziehung auf die Überzeugung: *Meinen*, *Glauben* und *Wissen*. „*Meinen* ist ein mit Bewußtsein sowohl subjektiv als objektiv unzureichendes Fürwahrhalten. Ist das letztere nur subjektiv zureichend und wird zugleich für objektiv unzureichend gehalten, so heißt es *Glauben*. Endlich heißt das sowohl subjektiv als objektiv zureichende Fürwahrhalten das *Wissen*.“ (ebd.)

Diese Sprachhandlungselemente – Behaupten und Begründen – treten immer auf, wenn während eines Meinungsaustauschs in einer Kommunikation die Fragen nach der Gültigkeit einer Äußerung auftauchen: Stimmt das? Ist das richtig?

In der Theorie der Argumentation finden sich verschiedene Systematisierungsansätze von Geltungsansprüchen, in denen Geltungsansprüche nach ihrer Art unterschieden werden (Habermas, 1981; Kopperschmidt, 1989). Einen Konsens in der Philosophie gibt es jedoch nicht, denn es besteht die Gefahr, bei der Unterscheidung die einzelnen Arten – und damit auch Artgrenzen – von Geltungsansprüchen auf konkrete Fälle festzulegen. Hierduch wird aber die Argumentationspraxis in neuen Fällen bevormundet und behindert.

Bei dem Versuch, auf die oben genannte Frage „Stimmt das? Ist das richtig?“ eine Antwort zu finden, erhält die Redepraxis eine gewisse charakteristische Struktur. Sie beginnt mit dem Aufstellen der ersten These und endet mit der Beurteilung des Geltungsanspruchs der Konklusion. Dazwischen wird das produziert, was Wohlrapp als Argumentation bezeichnet, die ihrerseits aus einzelnen Argumenten besteht. „Ein Argument ist ein beliebiger, kleinerer oder größerer Teil einer Argumentation, welcher eine identifizierbare Funktion innerhalb des Erweises der Geltung oder Nicht-Geltung der These hat“ (Wohlrapp, 2008, 192).

Rahmen und Rahmungen

Jedes bestimmte Erfassen eines Sachverhalts ist selektiv, denn Menschen erfassen Gegenstände und Phänomene ausschittsweise, in einem *Rahmen*. Die Einschränkung der Betrachtung erbringt die Fokussierung, ohne die keine gezielte Untersuchung und damit Erkenntnis möglich wäre. Den Ausdruck „Rahmen“ verwendet Wohlrapp (2008, 239) als Bezeichnung für die Grenze des Bereichs, der durch die Operationen des Erfassens um den Sachverhalt gezogen ist. Dabei gilt der Rahmen-Begriff sowohl für den Fall einer bewussten als auch unbewussten Handlung. Wenn ein Mensch einen Sachverhalt spontan auffasst, dann hängt der spontane Rahmen, in welchem er dies vollzieht, davon ab, wie er lebt. Hier ist die Verbindung zum Habitusbegriff sichtbar: „Die spontane Rahmung ist etwas Habituelles und der Habitus entsteht und festigt sich durch die vorgenommenen Rahmungen. Der Rahmen konstituiert also gleichsam außen den Gegenstand bzw. den Bereich, in dem der Gegenstand erfasst wird und innen konstituiert er den Betrachter“ (Wohlrapp, 2008, 241).

Ein schönes Beispiel zur Veranschaulichung des Begriffs findet man bei Hefendehl-Hebeker (2001b). Eine Lehrerin lässt Kinder ein Bild betrachten, auf dem fünf spielende und zwei weggehende Kinder dargestellt sind. Da es sich um eine Mathematikstunde handelt, erwartet die Lehrerin, dass ihre Schüler die angebotene Situation unter Zahlaspekten auffassen, mithin in einem rechnerischen Rahmen. Bei einer Schülerin zeichet sich jedoch in ihrer habituell gestalteten Subjektivität eine Wahrnehmungsselektion aus: Das Mädchen ist vor allem an sozial-psychologischen Aspekten der Situation, wie etwa „Warum gehen zwei Kinder weg? Hat es vielleicht Kummer gegeben?“ interessiert. Die anderen (möglichen) Aspekte scheinen für sie nicht relevant zu sein.

Man kann aber den Rahmen-Begriff weiter differenzieren, indem man zunächst zwischen dem *manifesten* und dem *latenten Rahmen* unterscheidet. Einen Grund, solch eine Trennung zu vollziehen, sieht Wohlrapp darin, dass für ein Subjekt manche Eigenschaften eines Sachverhaltes relevant, manche unerheblich sind und es von manchen nicht einmal die geringste Ahnung hat. Bei der manifesten Rahmung weiß der Mensch um die Einschränkung seiner Erfassung. Anders ist dies bei der latenten Rahmung; dort wird einem Subjekt die Einschränkung eigener Betrachtungsweise nicht bewusst. „Der latente Rahmen ist ein doppeltes (oder potenziertes) Nichtwissen. Wir wissen nicht, was wir ausblenden und wir wissen nicht, dass wir das nicht wissen“ (Wohlrapp, 2008, 248).

Latente Rahmungen können ferner nach Relevanz gestuft werden; die weniger mit der Subjektivität verwachsenen Rahmungen sind relativ leicht zu erkennen, z. B. die berühmte Figur „Entenhasen“ (Abb. 1.1), im Gegensatz zu denen, die „Konturen“ des eigenen Habitus abbilden. Letztere bezeichnet Wohlrapp als *primäre* Rahmungen. „Primäre Rahmungen halten die Rahmen- und Aspektbetrachtung, die ich durchführen kann, zusammen. Sie bestimmen, welche Aspekte ich als grundlegend, welche als sekundär erfasse. Ein primärer Rahmen wird nicht leicht manifest. (...) Primäre Rahmen zu erkennen, ist das, was traditionell „Selbsterkenntnis“ genannt wird“ (Wohlrapp, 2008, 246).

Da verschiedene Menschen eine und dieselbe Situation unterschiedlich rahmen, ist den Terminus *Rahmendifferenz* nützlich. Er wird anhand des Bildes „Entenhasen“ erörtert, an dem Wittgenstein (2004) seine Überlegungen zum Aspektsehen ausführt.

Ein Betrachter kann in der Zeichnung sowohl eine „Ente“ als auch einen „Hasen“ erkennen. Im Rahmen „Ente“ ist der Punkt das Auge und die beiden längeren Ausstülpungen bilden den Schnabel. Im Rahmen „Hase“ bleibt der Punkt das Au-

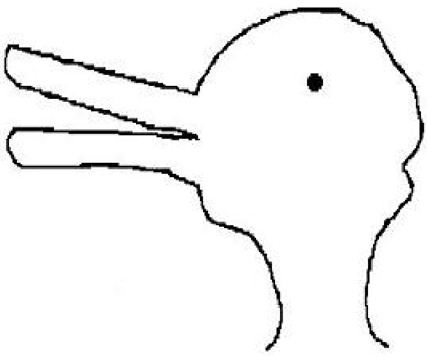


Abbildung 1.1: Wittgensteins „Entenhasenkopf“

ge, die beiden längeren Ausstülpungen jedoch sind die Ohren. Es bilden sich also zwei verschiedene Aspektpaare – (Ente/Schnabel) vs. (Hase/Ohren) – die über Dasselbe aussagen. Ein Betrachter kann demnach zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen, also eine Rahmenänderung vornehmen, ohne eine der beiden Rahmungen aufzuheben. Im Falle der Kommunikation von zwei Personen in einem Dialog kann diese Aspektverschiedenheit zu einer Situation führen, in der die Gesprächspartner aneinander vorbei reden. Wohlrapp (2008, 266) nennt dieses Kommunikationsproblem *Rahmendifferenz* und bringt eine fiktive argumentative Auseinandersetzung zweier Kommunikationspartner mit dem „Entenhasenkopf“ an: „Ich sehe den Entenhasen, aber ich weiß nicht, dass ich ihn „als Hase“ sehe. Ich finde z. B., dass er ein junges Tier mit einem rundlichen Tierkindergesicht ist. Du siehst den Entenhasen „als Ente“, bemerkst aber ebenfalls nicht die Sichtweise, die dir diesen Entenrahmen nahe legt, und findest die Aussage mit dem rundlichen Kindergesicht unpassend und abwegig. Dann sagst du etwas über den Schnabel, und ich finde das noch unpassender und abwegiger als du meine Aussage. Wenn eine Ente vielleicht noch ein rundliches Kindergesicht haben könnte, so kann definitiv ein Hase keinen Schnabel haben.“

Hier ist anzumerken, dass beide Kontrahenten bestimmte Aspekte hervorheben und sich aus ihren Sichtweisen hinaus äußern, ohne ihre Rahmen zu objektivieren. Mit dem Rahmen-Begriff ist es möglich, die schon oben angesprochenen Termini *Sichtweise* und *Perspektive* zu präzisieren. Wenn der Rahmen, in dem jemand einen Sachverhalt erfasst, objektiviert ist (das heißt, die dabei relevanten Einschränkungen und Zuspitzungen aufgezeigt sind), redet man von der *Perspektive*.

Solange aber die einschlägigen Rahmen latent bleiben, die Einschränkungen zwar wirksam aber nicht in Art und Ausmaß gesehen und ausgewiesen werden, wird der Ausdruck *Sichtweise* verwendet. „Die Perspektive ist somit die objektivierte Sichtweise“ (Wohlrapp, 2008, 247). Der Erkenntnisfortschritt sowie ein gelungener argumentativer Dialog sind demzufolge davon abhängig, dass die Rahmen erkannt, also manifest gemacht werden.

Bei der Auseinandersetzungen mit dem Lehren und Lernen von Mathematik betreten die Wissenschaftler der Fachdidaktik zum Teil dasselbe Terrain wie Philosophen. Allerdings werden für die erläuterten Termini oft fachspezifische Bedeutungen verwendet. In vielen seiner Arbeiten hat Krummheuer (Krummheuer, 1983, 1984, 1992; Krummheuer & Voigt, 1991; Krummheuer, 2003) eine disziplinspezifische Verwendung dieser Begriffe ausdifferenziert und vertieft ausgearbeitet.

Für die Analysen von Handlungen und Argumentationen in Interaktionsprozessen des Mathematikunterrichts hat sich in der Fachdidaktik der Begriff der *Rahmung* als „gewohnheitsmäßiges Deutungsmuster“ etabliert (Krummheuer, 1983, vgl.). Unter der *Rahmung* wird der Sinngebungshorizont eines Individuums verstanden, der den Kontext für ein Verstehen der Interaktion bereitstellt. Somit bezieht sich der Begriff „Rahmung“ auf Interaktionsprozesse und ist durch diese bestimmt.

Eine Person – sowohl ein Schüler als auch ein Lehrer – handelt in einer Interaktion gemäß ihrer Rahmung, was ganz oft zu Rahmungsdifferenzen zwischen Interaktionteilnehmern führt. Diese können allerdings entschärft werden, indem die angenommene Rahmungen „moduliert“, also verändert werden. Dadurch entsteht bei dem Einzelnen eine neue Sichtweise; so wird die Rahmungsdifferenz durch Modulation verringert (vgl. Krummheuer & Voigt, 1991, 17).

Anhand einiger Episoden aus dem Mathematikunterricht der Grundschule, in denen Kinder eine Aufgabe des Formats „Streichquadrate“ behandeln (aus Steinbring (2000a)), erläutert Schwarzkopf (2003) die Anwendung des Rahmungs-Begriffs für die Analyse der unterschiedlichen Deutungsmöglichkeiten, die eine solche Aufgabe bietet. Es wird zwischen einer Rechen-Rahmung und einer mathematisch-strukturellen Rahmung unterschieden. Die erste führt zu konkreten, „empirisch situierten“ (Steinbring, 2000b) – manchmal auch strukturellen im Sinne von geschicktem Rechnen – Überlegungen. Innerhalb dieser Rahmung werden Rechenoperationen durchgeführt, jedoch werden keine strukturell neuen Erkenntnisse gewonnen. Die zweite ermöglicht strukturell neue Sichtweisen, die „relative Allgemeinheit“

(ebd.) der Erkenntnisse über das hinter dem konkreten Beispiel stehende Prinzip ermöglichen. „Alle Rechnungen werden (...) unter einem neuen Fokus gesehen und dabei inhaltlich und über das konkrete Zahlenbeispiel hinaus gehend zueinander in Beziehung gesetzt“ (Schwarzkopf, 2003, 220).

1.3 Aspekte der Begriffsbildung im Lernprozess

Begriffe sind notwendig für „die Erkenntnis und Einbettung des Kindes in das soziale Leben: Das begriffliche Denken ordnet die wahrgenommene Welt, indem die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge aufgefasst werden können (vgl. Papadopoulos, 1999, 103f). Eine entscheidende Rolle im Begriffsbildungsprozess spielen nach Wygotski u. a. folgende Faktoren: das Bewusstwerden der eigenen Verhaltensprozesse und ihre Steuerung, die Übertragung der im kollektiven Leben des Jugendlichen entstandenen Verhaltensformen auf die innere Ebene der Persönlichkeit und die allmähliche Ausbildung neuer Verhaltensweisen“ (vgl. Wygotski, 1931, 457).

„Das Problem der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe im Schulalter ist vor allem eine praktische Frage von sehr großer, vielleicht sogar erstrangiger Bedeutung in bezug auf die der Schule gestellten Aufgaben“ (Wygotski, 1934a, 167).

1.3.1 Denken und Handeln

Mit dem so genannten Didaktischen Dreieck aus Lehrer – Schüler – Stoff von Herbart (1965), der das Unterrichten als ein interaktives Handeln darstellt, werden die Frage nach der Verbindung des menschlichen Denkens und Handelns besonders aktuell. In seinem Buch „Denken: das Ordnen des Tuns“ geht Aebli dieser Frage nach und weist die Verbindungen zwischen Handeln und Denken nach, indem er Handeln vom einfachen Verhalten eines Menschen begrifflich abgrenzt. Im Verhaltensbegriff sind sowohl willkürliche und unbewusste, als auch unwillkürliche und bewusste Reaktionen des Menschen zusammengefasst. Die unwillkürlichen und bewussten, also die absichtsvollen Verhaltensweisen, werden von den unbewussten und willkürlichen insofern separiert, dass sie durch den Begriff der Tätigkeit bzw. des Tuns beschrieben werden. Somit definiert Aebli das Tun als zielgeleitetes und absichtsvolles menschliches Verhalten in Abgrenzung zu unbewussten Reaktionen.

Innerhalb des Tuns stellt Aebli das Handeln als ein spezielles Verhalten heraus, welches um die Dimension der Zielgeleitetheit erweitert ist: „*Handeln* bezeichnet Bereiche des Tuns mit hohem Grad der Bewußtheit und der Zielgeleitetheit“ (Aebli, 2001, 20). Das Handeln wiederum kann weiterhin aufgespalten werden in praktisches Handeln und Sprechhandeln. Der Mensch nutzt die Sprache um sein praktisches Handeln abzubilden und überträgt so die tatsächliche Handlung in die Dimension der Sprache. Er operiert mit der Sprache in derselben Art und Weise, wie er es im praktischen Handeln mit dem realen Objekt tun würde. Somit entsteht das Denken, auch das Nachdenken über das eigene Tun, aus dem Handeln heraus: „Denken geht aus dem Handeln hervor“ (Aebli, 2001, 26). Er bezeichnet den Begriff als „das Werkzeug, mit dem wir die Wirklichkeit deuten“ (Aebli, 1994, 83). Er erweitert die äußere, physische, biologische und objektiv-kulturelle Wirklichkeit um eine psychische Dimension, und geht davon aus, dass das begriffliche Denken des Menschen sich zurück bezieht auf sein vorhergegangenes Tun und auf die dabei ablaufenden psychischen Prozesse. Für ihn ist der Begriff „das Instrument jeglicher Erkenntnis“ und das „Werkzeug des Denkens“.

Begriffliches Denken beginnt mit der „Distanzierung von der Situation, Isolierung der in ihr enthaltenen Elemente und Beziehungen, reine, durchsichtige Fassung der Struktur (der „Ordnung“), Abgrenzung derselben aus dem Kontext, bei gleichzeitiger Klärung der Beziehungen zu diesem“ (Aebli, 1994, 84). Die Parallele zum Handeln wird hier deutlich: Auch in der Handlung, die sich ebenfalls aus unterschiedlichen Elementen zusammensetzt, beobachtet der Handelnde die Situation, in der er agiert, und nimmt sie wahr. Es vollzieht sich in der Handlung ebenfalls eine Bildung von Strukturen und Beziehungen; durch Handeln mit konkreten Objekten wie Würfeln, Plättchen oder in gegebenen diagrammatischen Kontexten kann sich die Erkenntnis von Strukturen herausbilden. Der Unterschied jedoch ist, dass diese Beziehungen sich in der Handlung konkret realisiert ergeben und erst im Handlungsergebnis objektiviert werden. Die Struktur des herzustellenden Aktes bleibt dem Handelnden allerdings teils unbewusst, da in erster Linie das Ergebnis der Handlung im Vordergrund steht. Der Begriff dagegen ändert nichts an einem Objekt, er soll vielmehr die Aufgabe erfüllen, dem Menschen die Wirklichkeit seines Handelns geistig fassbar zu machen. Die Beziehung, die den Hauptbestandteil des Begriffes ausmacht, wird nach Aebli dabei vergegenwärtigt, indem sich der Mensch den Begriff vor sein geistiges Auge führt.

1.3.2 Denken und Sprechen

Die Wissenschaft beschäftigt sich schon seit Langem mit der Frage, ob und wie die Prozesse des Denkens und Sprechens miteinander verbunden sind (vgl. Sfard, 2008, 95). Wissenschaftliches Denken ist dadurch gekennzeichnet, dass es Erkenntnisse in Begriffe und Aussagen fasst und sie somit kommunizierbar macht. Das Bewusstmachen von Gedanken und deren Versprachlichung, ist für Wygotski (1934a) eine notwendige Bedingung für die Existenz des wissenschaftlichen Denkens.

Ausschlaggebend für das Bewusstwerden irgendeines Verhaltens ist, „sie aus der Ebene des Handelns in die Sprache zu übertragen“ (Wygotski, 1934a, 193f). Dabei bleibt Bewusstwerden ein Prozess besonderer Art: „Bewußtwerden ist der Bewußtseinsakt, dessen Gegenstand die Bewußtseinstätigkeit selbst ist“ (Wygotski, 1934a, 205). Er erläutert seine Ausführungen durch das folgende Beispiel. Auf die Frage „Weißt du, wie du heißt? “, antwortet ein gefragtes Schulkind mit der Nennung seines Vornamens. Das Kind deutet somit die Frage als Aufforderung seinen Namen zu nennen. Es kann sich jedoch nicht bewusst machen, dass die Frage nicht darauf abzielt zu erfahren, wie es heißt, sondern darauf, ob es weiß, wie es heißt, oder ob es das nicht weiß. „Es kennt seinen Vornamen, ist sich aber der Kenntnis seines Vornamens nicht bewußt“ (Wygotski, 1934a, 205).

Die empirischen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen von Wygotski entwickelten sich in Auseinandersetzung mit den Arbeiten von Piaget zu den Sprachfunktionen des Kindes. Ein wichtiger Gedanke Piagets, mit dem Wygotski übereinstimmt, ist, dass das Kind nicht als kleiner Erwachsener begriffen werden kann und dass sein Verstand nicht ein verkleinerter Verstand eines Erwachsenen ist. Zu dieser These gelangte Piaget, indem er – im Gegensatz zu früheren Annahmen – dasjenige in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit rückte, was das Kind hat, kann und was sein Denken durch spezifische Eigenschaften auszeichnet. Er definierte die Eigenarten des kindlichen Denkens nicht mehr über seine Unfähigkeit zur Abstraktion, zur Begriffsbildung, zur Verbindung von Urteilen, zur Schlussfolgerung usw. Wygotski hebt diese Leistung Piagets hervor: „Hinter dieser schlichten Wahrheit verbirgt sich im Grunde der Gedanke der Entwicklung“ (Wygotski, 1934a, 17f).

Seine Untersuchungen zur Sprachfunktion des Kindes führen Piaget zur Einteilung kindlicher Gespräche in egozentrische und sozialisierte, wobei sie sich besonders durch ihre unterschiedlichen Funktionen auszeichnen.

Die egozentrische Sprache benutzt das Kind in seiner Beschäftigung mit sich selbst, während es nur für sich spricht „Das Kind spricht so mit sich selbst, als ob es laut denkt. Es wendet sich an niemand“ (Wygotski, 1934a, 32f). Die egozentrische Sprache kann als eine Art „sprachliche Begleitmusik“ der kindlichen Tätigkeit angesehen werden. Mit der sozialisierten Sprache hingegen wendet sich das Kind bewusst an einen Gesprächspartner, um mit diesem in einen Gedankenaustausch zu treten. Nach Wygotski kann die egozentrische Sprache leicht zu einem Mittel des Denkens werden und zur Bildung eines Plans zur Lösung einer Aufgabe beitragen. Dafür führt er ein Beispiel aus seinen Beobachtungen eines Kindes (5 Jahre 6 Monate) an: Während des Versuches eine Straßenbahn zu zeichnen, bricht dem Kind die Spitze seines Bleistiftes ab. Es sagt dabei leise zu sich selbst: „Es ist kaputt“ und greift nun zu Tusche. Hier weicht es nun von seinem ursprünglichen Plan ab und beginnt, durch den Vorfall angeregt, einen beschädigten Wagen zu malen, der nach einem Unfall repariert wird. Während des Weiterzeichnens spricht das Kind immer wieder zu sich selbst über das veränderte Thema seiner Zeichnung. Wygotski sieht die zufällig entstandenen egozentrischen Äußerungen des Kindes eng mit dem Ablauf seiner Tätigkeiten verbunden und schließt nach dem Zusammenhang mit dem Denkprozess des Kindes: „Es beweist so eindeutig, dass die Situation und die Schwierigkeit bewusst erfasst wurden und dass das Kind nach einem Ausweg suchte, – die Sprache ist also in ihrer Funktion nicht von dem Denkprozeß zu trennen − dass es einfach unmöglich ist, sie als ein Nebenprodukt der Aktivität des Kindes anzusehen“ (Wygotski, 1934a, 38).

In seinen theoretischen Überlegungen stellt Wygotski eine Verwandtschaft zwischen der inneren Sprache der Erwachsenen und der egozentrischen Sprache des Vorschulkindes fest. Beide Sprachen haben sowohl die Funktion, ein Sprechen für sich selbst zu sein, als auch strukturelle Besonderheiten, die sie für die Umgebung oft unverständlich machen. An dieser Stelle sind die Beobachtungen Wygotskis mit den Untersuchungen Piagets konform, die gezeigt haben, dass die egozentrische Sprache des Menschen den anderen meist unverständlich ist. „Sie ist nur für den Sprecher verständlich, sie ist verkürzt und zeigt die Tendenz zu Auslassungen oder Kurzschlüssen“ (Wygotski, 1934a, 40). Egozentrische Sprache ist „eine Sprache, die der individuellen, aber nicht der sozialen Anpassung dient.“ (ebd.)

Trotz der Übereinstimmung in der Spezifikation des menschlichen Sprechens in die drei Formen soziale, egozentrische und innere Sprache der Erwachsenen, sowie in der Idee der Entwicklung unterscheiden sich Piaget und Wygotski in der Auslegung der Richtung dieser Entwicklung. Die Entwicklung des kindlichen Denkens verläuft nach der Theorie Piagets im Allgemeinen in der Richtung von der inneren zur sozialisierten Sprache und es ist „das Schicksal der egozentrischen Sprache ... abzusterben“ (vgl. Wygotski, 1934a, 39). Nach der Hypothese Wygostkis verläuft die Entwicklung des kindlichen Denkens in anderer Richtung: „Das Schema hat also folgende Form: soziale Sprache – egozentrische Sprache – innere Sprache“ (Wygotski, 1934a, 44).

Als ursprüngliche Funktion der Sprache sieht Wygotski eine kommunikative, nämlich die der Mitteilung und der Einwirkung auf die Menschen der Umgebung. „Demzufolge ist die ursprüngliche Sprache des Kindes eine rein soziale“ (Wygotski, 1934a, 41f). Die soziale Sprache des Kindes differenziert sich nach Wygotski erst später in mehrere Funktionen und teilt sich ab einer späteren Entwicklungsstufe in eine egozentrische und eine kommunikative Sprache. Aus der egozentrischen Sprache, welche sich von der kommunikativen Funktion losgelöst hat, entwickelt sich eine innere Sprache des Kindes „die die Grundlage sowohl seines autistischen als auch seines logischen Denkens bildet“ (Wygotski, 1934a, 43).

Das Hauptergebnis der experimentellen sowie theoretischen Untersuchungen Wygotskis zum Thema Denken und Sprechen ist seine These, dass die Entwicklung des kindlichen Denkens nicht vom Individuellen zum Sozialisierten, sondern vom Sozialen zum Individuellen verläuft.

In der von der Autorin durchgeführten Studie ist die Frage nach der Richtung der Entwicklung der kindlichen Sprache nicht ausschlaggebend, vielmehr ist das Vorhandensein einer Verbindung zwischen Denken und Sprechen, sowie einer egozentrischen Sprache von Bedeutung. Um diese beobachten zu können, ist es durch das Vorhandensein der inneren Sprache ab einem bestimmten Alter notwendig, lautes Denken anzuregen. Unter anderem dadurch sollen Denkhandlungen der Kinder rekonstruiert werden können.

1.3.3 Denken und Kommunizieren

Der Gebrauch des Wortes Kommunikation erstreckt sich über vielfältige Gebiete, sowohl in der Wissenschaft als auch in alltäglichen Bereichen. Krämer (2008) spricht über die Verbreitung des Wortes Kommunikation in unserer Alltagssprache: „Nahezu alles, was unser zivilisatorisches Selbstverständnis berührt, lässt sich mit

Hilfe dieses Wortes – irgendwie – strukturieren und beschreiben“ (Krämer, 2008, 12f). Sie listet auf, was in unserem Zeitalter unter den Begriff *Kommunikation* fallen kann und kategorisiert diese Fülle des Begriffsgebrauchs folgendermaßen: „Im Diskurs der Gegenwart führt das Wort ein begriffliches Doppelleben; es tritt auf in zwei profilierten, jedoch gegenläufig zueinander stehenden Zusammenhängen, die wir hier das „technische Übertragungsmodell“ und das „personale Verständigungsmodell“ der Kommunikation nennen wollen.“ (ebd.) Im ersten Gebrauch geht es um die reine Datenübertragung zwischen einem Sender und einem Empfänger, die sich in räumlich-zeitlicher Entfernung befinden. Das Grundproblem der Kommunikation besteht hier darin, die Daten/Signale gegen externe Störungen beim Übertragen stabil zu halten, was nur gelingt, wenn der „störende Dritte“ dem Übertragungsgeschehen ferngehalten werden kann. Einen ganz anderen Ansatz bietet das „personale Verständigungsmodell“, in dem Kommunikation als „eine Interaktion zwischen Personen, die an wechselseitiges Verstehen mit Hilfe bedeutungs- und sinnhaltiger Zeichen – vor allem sprachlicher Art – gebunden ist“ (ebd.) beschrieben wird.

Auch Sfard (2008) versteht Kommunikation im Sinne von Interaktion zwischen kommunizierenden Personen als eine gemeinschaftliche Handlung, welche aus einer Aktion eines Individuums und einer passenden Re-Aktion eines Zweiten entsteht. Dabei ist die Aktion als kommunikativ anzusehen, also mit einer Kommunikation anstrebenden Intention versehen. Die Re-Aktion muss mit der vorhergegangene Aktion verbunden sein, wird aber auch beeinflusst von verschiedenen anderen Faktoren wie z. B. der Vorgeschichte der Situation in der die Kommunikation entsteht sowie den Persönlichkeiten und den dabei ablaufenden individuellen Denkprozessen der Kommunizierenden.

Denken wird von Sfard als individualisierter Sonderfall der Kommunikation angesehen. Dabei kommuniziert das Individuum mit sich selbst, ohne dass die Kommunikation auf verbaler Ebene stattfinden muss. Diese Interpretation von Denken führt Sfard zu einer Verschmelzung beider Begriffe: Kommunikation (*communication*) und Denken (*individual-cognition*) werden zu *Commognition*. Diese Definition „stresses the fact that these two processes are different (intrapersonal and interpersonal) manifestations of the same phenomenon“ (Sfard, 2008, 83).

Bezieht man Denken nun auf das Unterrichtsgeschehen, muss beachtet werden, dass individuelles Denken nicht nur isolierte Kommunikation mit sich selbst darstellt, sondern gerade im Unterricht in einen kooperativen Denkprozess zwischen den Kommunizierenden involviert ist – sowohl unter den Schülern selbst als auch in Interaktion mit dem Lehrer. In der Unterrichtssituation können Kommunikation und Interaktion als kommunikatives Handeln gesehen werden, da die Situationsrahmungen unter den Kommunizierenden zunächst ausgehandelt werden müssen. „Sprachliche Kommunikation bewirkt nur dann Veränderungen in unseren Partnern, wenn diese sich aufgrund interner Prozesse der Bedeutungserzeugung oder durch nichtsprachliche Kommunikation mit uns bereits in einem konsensuellen Zustand befinden. Wissen kann nicht übertragen, sondern nur wecheslseitig konstruiert werden“ (Roth, 2003, 551f.).

In seiner Theorie des kommunikativen Handelns greift auch Habermas diesen Gedanken auf: „Kommunikatives Handeln stützt sich auf einen kooperativen Denkprozess, in dem sich die Teilnehmer auf etwas in der objektiven, der sozialen und der subjektiven Welt zugleich beziehen, auch wenn sie in ihrer Äußerung thematisch nur eine der drei Komponenten hervorheben. Dabei verwenden Sprecher und Hörer das Bezugssystem der drei Welten als Interpretationsrahmen, innerhalb dessen sie gemeinsame Definitionen ihrer Handlungssituation erarbeiten“ (Habermas, 1981, 184). Wenn kommunikatives Handeln als gemeinsame Bewältigung von Situationen verstanden wird, ist die Verständigung zwischen den Kommunizierenden von besonderer Bedeutung. Als Mittel der Kommunikation dient die Sprache, welche die Versprachlichung der individuellen Gedanken voraussetzt. „Verständigung bedeutet die Einigung der Kommunikationsteilnehmer über die Gültigkeit einer Äußerung“ (Habermas, 1981, 184).

In der Mathematik funktioniert Verständigung über inhaltsbezogene mathematische Wege der Argumentation und des Beweisens. „In its historical development the modern mathematical proof has become the symbolically generalized communication medium specific for mathematics which makes mathematical communication possible and successful“ (Steinbring, 2005a, 72). Die moderne mathematische Kommunikation erfolgt durch die formale Sprache der Mathematik, welche sich auf die Verwendung von Symbolen stützt. Das führt dazu, dass sowohl symbolisches Darstellen als auch mathematisches Argumentieren zentrale Bestandteile des Mathematiklernens von Schulkindern sind. Bezogen auf die Mathematik führt Steinbring zwei grundlegende Probleme in der Kommunikation auf. Zum Einen sind die mathematischen Objekte und Konzepte, die kommuniziert werden sollen, nicht von den Sinnen erfassbar, zum Anderen existiert zwischen der privaten Gedankenwelt des Individuums und der öffentlichen Kommunikation eine große Kluft. (vgl. Steinbring, 2005a, 72)

1.3.4 Über das eigene Denken nachdenken

„Reflexion“ gibt es in der Philosophie seit der griechischen Antike (vgl. Wohlrapp, 2008, 445). In Platons Dialogen tritt der typische Philosoph wie ein Geburtshelfer auf. Er erleichtet dem Schüler das Hervorbringen von Gedanken, indem er eine Methode des Reflektierens im Sinne der Optik verwendet. Bei Aristoteles zeigt sich die deutliche Wahrnehmung der eigenen Denktätigkeit, die auf sich selbst achtet (auf Griechisch „Epistrophe“, was auf Lateinisch zu „reflexio“ wird). Kant (1968, 287) bezeichnet es als „transzendentale Reflexion“, wenn der Geist sich auf sich selbst richtet, um „das Verhältnis gegebener Vorstellungen zu einer oder der anderen Erkenntnisart“ – zur Sinnlichkeit oder zum reinen Verstand – zu bestimmen. Damit wird ausgedrückt, dass Reflexion im Prinzip durch ein Subjekt selbst als Leistung seines Geistes vollzogen werden kann. Jedoch erfolgt die Ausschärfung von Gedanken meistens erst mit der Notwendigkeit, die eigene Position vor den anderen Menschen zu vertreten.

Nachdem in den vorigen Ausführungen über Denken und Handeln, Denken und Sprechen sowie Denken und Kommunizieren referiert wurde, wird nun das Nachdenken über das eigene Denken thematisiert, was durch den von Flavell (1976) eingeführten Begriff Metakognition ausgedrückt wird. Dabei hat Metakognition eine weite Spanne an Bedeutungen: von Wissen über eigene Kognitionsprozesse bis hin zu Selbstregulation während des Problemlösens (vgl. Schoenfeld, 1992, 334, 354). Die psychologische Forschung untersucht im Problembereich der Metakognition den Erwerb von Wissen über (eigene und fremde) geistige Tätigkeit im Verlauf der Entwicklung. In Anlehnung an Flavell (1983) formuliert Sjuts die Schlüsselbegriffe Wissen, Kognition und Metakognition: „Dabei sei *Wissen* verstanden als zusammenfassender Begriff für angeeignete inhaltsbezogene Kenntnisse und Fertigkeiten, *Kognition* als die mit Erwerb, Organisation und Gebrauch von Wissen verbundene geistige Aktivität und *Metakognition* als Empfinden, Kennen und Steuern der eigenen Kognition“ (Sjuts, 2003, 33). Metakognition basiert also auf der menschlichen Fähigkeit, eigenes Wissen, eigenes Handeln und Denken sowie eigenes Lernen zu reflektieren.

Da in Unterrichtssituationen genau diese Bereiche kommuniziert werden, ist Metakognition für den Unterricht von wesentlicher Bedeutung. Denn um die Kommunikation zwischen Lernenden und Lehrenden sowie zwischen Lernenden untereinander zu ermöglichen, muss jeder einzelne Unterrichtsteilnehmer seine eigenen Gedanken offenlegen. Voraussetzung dafür ist, dass sie sich über ihre eigenen Vorstellungen im Klaren sind. „*Bewusstheit* ist also ein wesentliches Bestimmungsstück von MK“ (Hasselhorn, 1998, 348). Für verständigungsorientiertes Lernen ist Metakognition von unverzichtbarer Bedeutung. „Der diesbezügliche Unterricht ist geprägt von Diskursivität, vom Austausch der individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler, vom Abgleich ihrer Argumente, von Anspruch und Ausmaß ihrer gedanklichen Klärungen. Der diskursive Unterricht nimmt die Unterschiedlichkeit der Lernenden ernst: er setzt sich intensiv mit ihren mentalen Konstruktionen und Modellen auseinander“ (Sjuts, 2003, 23). Diese Verständigungsdimension wird jedoch durch die Begrenztheit der kommunikativen Bedeutungsaushandlung vor Schwierigkeiten gestellt. Die Kommunizierenden können, um erfolgreich miteinander zu kommunizieren, durch geeignete Aufgabenstellungen dazu bewegt werden, ihre mentalen Konstruktionen nach außen zu kehren. Ihre vorhandenen sprachlichen Artikulations- und Repräsentationsformen müssen durch bereitgestellte fachsprachliche Mittel ergänzt werden.

Nach Sjuts ist beim Mathematiklernen Metakognition unbedingt nötig, da beim Aufbau mathematischer Vorstellungen Fehler, Irrtümer und Unzulänglichkeiten auftreten. Werden eigene Fehler und Fehlvorstellungen zu Objekten einer Analyse, wird Metakognition auf natürliche Weise initiiert. Fehleranalyse, aber auch Wissens- und Denkanalyse generell, „sind nur ein Teil von Metakognition, aber sicher ein wesentlicher Teil als Voraussetzung für das Nachdenken über das eigene Denken, als Voraussetzung für bewusste Kontrolle samt Korrektur und Steuerung“ (Sjuts, 2001, 65).

Die Abgrenzung der Metakognition von Reflexion und anderen mentalen Aktivitäten und Phänomenen ist dadurch gekennzeichnet, dass „kognitive Zustände oder Funktionen die Objekte sind, über die reflektiert wird“ (Hasselhorn, 1998, 348). Die Forschung auf dem Feld der Metakognition müsste sich laut Flavell in der Zukunft mit den verschiedenen Aspekten des Begriffs befassen, um ihn zu präzisieren.

1.4 Arithmetik und Algebra

In diesem Abschnitt betrachten wir die Schulalgebra von einer arithmetischen Perspektive. Die Beziehung zwischen Arithmetik und Algebra erklärt nicht nur einige typische didaktische Probleme der Schulalgebra, sondern zeigt auch, warum die frühe Einführung der Algebra, basierend auf Arithmetik, für diese Untersuchung gewählt wurde. „Algebra may ... be described as *metaarithmetic* or, more precisely, as the *unification of arithmetic with its owm metadiscource*. Its power is in the names that reify and unify whole classes of computational processes and at the same time tell the exact story of the processes themselves" (Sfard, 2008, 120).

Als Hauptprobleme bei der Einführung in die Schulalgebra stellt die Fachliteratur folgende Bereiche heraus: die Bedeutung von Buchstabenvariablen, der Übergang von arithmetischen zu algebraischen Konventionen sowie das Erkennen und Benutzen von Strukturen. Diese Bereiche werden im folgenden näher erläutert.

1.4.1 Zeichen und Operationen

Das Problem, das Kinder bei der Einführung in die Algebra mit der Bedeutung von Buchstabenvariablen haben, ist vergleichbar mit der Schwierigkeit der Schulanfänger mit Arithmetik im Mathematikunterricht. Bereits vor Schuleintritt erfahren Kinder, dass Zahlen in einer Vielzahl von Situationen vorkommen, von denen einige für die Repräsentation von Größen benutzt werden. Die Darstellung der Zahlen in schriftlicher Form mit Hilfe von Zahlensymbolen gehört ebenfalls zum Alltag der Vorschulkinder, Operationszeichen wie $+$ und $-$ dagegen nicht (vgl. Hughes, 1986, 96). Erst in der Schule beginnen sie systematisch mit Zahlen zu operieren, was eine erste große Anforderung darstellt. Die Kinder müssen lernen, unabhängig von Sachbezügen, in der „Welt der Zahl" zu operieren, d. h. sie müssen die „symbolische Selbständigkeit der Zahl" (Krämer, 1988) erfassen können. Also stellt bereits der Arithmetikunterricht einen Bruch mit dem Alltag der Kinder dar, da die Operationen mit Zahlen nicht zu ihren *subjektiven Erfahrungsbereichen* (Bauersfeld, 1983) gehören. Haben die Grundschulkinder diese Verwendung von Zahlen in Rechenhandlungen verinnerlicht, sehen sie die schriftlichen Zahlensymbole als untrennbaren Bestandteil des Operierens an.

Gerade das stellt beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra ein didaktisches Problem dar. Die Schüler betrachten die Algebra aus der Perspektive ihrer

Konzepte und Kompetenzen aus dem Arithmetikunterricht. Die Schwierigkeiten, die sie nun mit der Einführung in die Algebra haben, haben zum einen ihren Ursprung in der Erfahrung, dass Rechenhandlungen im Arithmetikunterricht maßgeblich darauf ausgerichtet sind, Resultate zu erzeugen. Die hinter den Operationen verborgenen Strukturen bleiben dagegen implizit. „Thus, beginning algebra students experience difficulty in representing formal mathematical methods because in elementary school they do not make explicit the procedures they use in solving arithmetic problems“ (Kieran, 1990, 99). Viele Schüler haben ein sehr geringes Verständnis von arithmetischen Beziehungen und Strukturen, welche die Basis der algebraischen Repräsentation sind. Der Einstieg in die Algebra kann daher nicht bedeuten, ohne Blick zurück Neuland zu betreten; er muss auch damit verbunden sein, das altbekannte Terrain aus einer neuen Perspektive zu betrachten. „The ability to work meaningfully in algebra, and thereby handle the notation conventions with ease, requires that students first develop a semantic understanding in arithmetic“ (Booth, 1989, 58). Zum anderen liegt der Ursprung der Probleme bei der Einführung der Algebra in der neuen, zweckentfremdeten Verwendung von Buchstaben als Variablen, die jetzt, wie auch konkrete Zahlen, Bestandteile von Operationen werden. Diese neue Verwendung der Buchstaben passt nicht mehr in die den Kindern bisher bekannte Aufteilung in eine „Zahlenwelt“, die Welt der Rechenoperationen mit Zahlen, und eine „Buchstabenwelt“, die Welt der Schriftsprache. Aus Kindersicht treten nun Buchstaben in die für sie „fremde“ Welt der Zahlen ein, übernehmen die Rolle der Zahlen und „mischen“ sich in Operationen ein. Einen Buchstaben als „generalized number“ zu betrachten wird nicht als eigentliche Schwierigkeit der Schüler bezeichnet, sondern mit dieser zu operieren, sie also als „operational generalized number“ aufzufassen (Linchevski & Herscovics, 1996). Kinder können nicht spontan mit Buchstabenvariablen operieren, dies ist erst möglich, wenn sie für die Buchstabenzeichen die arithmetischen Operationen zulassen. „This inability to spontaneously operate on or with the unknown constituted a cognitive obstacle that could be considered a gap between arithmetic and algebra“ (Linchevski & Herscovics, 1996, 41).

1.4.2 Prozess vs. Objekt

Wie bereits in den obigen Ausführungen erwähnt, ist die elementare Arithmetik in erster Linie durch ergebnisbezogenes Operieren mit Zahlen geprägt.[2] In der Algebra jedoch repräsentieren die symbolischen Ausdrücke selbst die Gegenstände des Interesses. Dabei erscheinen sie mit doppeltem Gesicht – als Ausdruck wie auch als Ergebnis eines operativen Prozesses. Ausgehend von diesen Aspekten (Operation oder Objekt) kann der Ausdruck „a+b" entsprechend gedeutet werden: „It represents both the procedure of adding a to b and the object $a+b$. That there is often not a clear distinction in algebra between the process and the object has been characterized by Davis (1975) as the *process-product* dilemma" (Kieran, 1990, 99).

Malle (1993) nennt diese Doppelnatur einer Formel die *Handlungs-Beziehungs-Konvention*: „Ein algebraischer Ausdruck kann sowohl eine Rechenhandlung als auch eine Beziehung zwischen Zahlen (Größen) bedeuten" (Malle, 1993, 110). Er betont eine enge Verbundenheit zwischen diesen: „Handlungen und Beziehungen stehen in einem Zusammenhang: Beziehungen werden durch Handlungen entdeckt bzw. konstruiert, Handlungen werden durch Beziehungen angeregt und gesteuert" (Malle, 1993, 144). Der Aspekt einer Zahlenbeziehung kommt in der Arithmetik zwar vor, es dominiert aber der Aspekt der Rechenhandlung. Beim Einstieg in die elementare Algebra gewinnen die Beziehungen zwischen Zahlen in einer Formel an Bedeutung, was zu den Schwierigkeiten der Schüler führt (vgl. Malle, 1993, 145).

Sfard & Linchevski (1994, 199) kommen in ihren Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass die Schwierigkeit in der Algebra nur vordergründig darin liegt, dass Buchstaben statt Zahlen verwendet werden, und vielmehr darin begründet ist, dass die symbolischen Formeln eine doppelte Deutung erhalten: als Rechenprozeduren und als resultierende Objekte. Denn es widerspricht dem Alltagsdenken fundamental, dass ein Prozess mit seinem Ergebnis identisch sein soll: „Even our most abstract thinking is shaped by metaphors provided by sensory experience (Lakoff and Johnson, 1980), and this experience speaks with force against the idea of a process which produces no added value and ends up being treated as its own product. Indeed, nothing like that is possible in real life: we cannot eat a recipe for a cake pretending it is the cake itself (even though we can imagine the cake or oursel-

[2] Allerdings gibt es auch in der Mathematikdidaktik der Grundschule vielfältige Ansatze, die rein rechentechnische Sicht durch eine strukturorientierte Sicht zu ergänzen (Müller et al., 2004).

ves eating the cake)! Thus, our intuition rebels against the operational-structural duality of algebraic symbols, at least initially.“ (ebd.)

1.4.3 Gleichheitszeichen

Operatoren-Zeichen wie + oder − sowie das Symbol = werden in der Arithmetik als Anreiz gesehen, mit den Zahlen, die diese Zeichen verbinden, zu operieren. So zeigt Freudenthal (1983), dass der Ausdruck 7+5 = als die Aufforderung zum Ausrechnen verstanden wird und zu dem Ausdruck $7 + 5 = 12$ führen würde, obwohl man an der Stelle aber auch eine Gleichung wie $7 + 5 = 5 + 7$ oder $7 + 5 = 6 + 6$ aufstellen könnte. „In the arithmetical language the equality sign invites a transformation procedure, and one has to know which one. Right of the equality sign is the place of the *result*“ (Freudenthal, 1983, 465). In dem Ausdruck $7 + \cdot = 12$ dagegen ist das „Resultat“ die Zahl 5, obwohl nach dem Gleichheitszeichen die Zahl 12 steht. Dieses Dilemma stellt eine Herausforderung für viele Lernende dar (ebd.).

Ein weiterer Unterschied zwischen Arithmetik und Algebra liegt an den verschiedenen Problemdarstellungen durch Gleichungen: „In arithmetic, children think of the operations they use to solve the problem; in algebra, they must represent the problem situation rather than the solving operations“ (Kieran, 1990, 99). Bei arithmetischen Problemlösungen tauchen in Termen und Gleichungen nur bekannte Größen auf, mit denen operiert wird. Am Ende des Prozesses wird die unbekannte Größe ermittelt. Somit besteht in der Arithmetik keine Notwendigkeit, eine unbekannte Größe zu repräsentieren. Im Unterschied dazu steht die unbekannte Größe in der Algebra am Anfang des Problemlösens und muss deshalb repräsentiert werden. Dies kann in Form eines Wortes, Bildes oder Zeichens dargestellt werden. (vgl. Radford & Puig, 2007, 146). Die Herausforderung für die Lernenden dabei liegt darin, zu entscheiden, was und wie repräsentiert werden soll: „When we translate a situation into symbols, one of the first steps is to choose what to represent and how. That choice ... can have crucial effects on the solution process, and on the results“ (Arcavi, 1994, 28).

Es geht jedoch nicht nur darum, eine Gleichung aufzustellen, die in der Algebra eine andere Denkweise erfordert, vielmehr verlangt die Lösung einer Gleichung manchmal eine Lösungsstrategie, die in der Grundschularithmetik noch nicht vorkommt. Filloy und Rojano (1984) haben herausgestellt, dass sobald eine Unbekannte in Form eines Zeichens auf beiden Seiten des Geichheitszeichens auftritt, algebraische Methoden beim Lösen solcher Gleichungen angewendet werden müssen. Diese Hürde nennen sie einen *didactical cut*. Sie kann erfogreich bewältigt werden „if students are to move from arithmetical mode of functioning to an algebraic one“ (Kieran, 1990, 100).

Auch Hughes betont die veränderte Rolle des Gleichheitszeichens bei dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra, in dem die Kinder mit der Idee konfrontiert werden, dass das Gleichheitszeichen als Anzeichen für eine Äquivalenz beider Seiten einer Gleichung zu deuten ist. „Algebra uses the equivalence of such relationships as the basis for calculating the value of x“ (Hughes, 1986, 111).

1.4.4 Structure Sense und Symbol Sense

Das offensichtlichste Merkmal der Algebra ist der Gebrauch von Symbolen und das Manipulieren mit symbolischen Ausdrücken – wie Termumformungen – nach einem System von Regeln, nach denen erlaubte Konstruktionen gebildet werden. Das konstituiert die *Syntax* der algebraischen Sprache, wobei von der inhaltlichen Bedeutung der Symbole und Zeichen abgesehen wird.

Auch Kinder, die mit dem Manipulieren von Symbolen, also mit algebraischen Techniken erfolgreich umgehen, sehen die Algebra oft nicht als effektives Werkzeug „for understanding, expressing, and communicating generalizations, for revealing structure, and for establishing connections and formulating mathematical arguments (proofs) “ (Arcavi, 1994, 24). Die Ursache dafür sieht Arcavi (1994) darin, dass viele Algebra lernende Schüler sogar nach vielen Jahren der Verwendung den Sinn und die Bedeutung der Buchstabensymbole in der Algebra, also die *Semantik* der algebraischen Sprache, nicht verstanden haben. Da das Aufstellen der Terme und das Operieren mit symbolischen Ausdrücken eine große Rolle in der Schulalgebra spielen, ist ein wichtiger Aspekt dabei zu verstehen, was die algebraischen Ausdrücke repräsentieren. Ohne die Semantik der Algebra zu verstehen, bleiben die strukturellen Eigenschaften mathematischer Operationen und Beziehungen verborgen und das Manipulieren mit Symbolen eine rein mechanische, nicht mit Sinn erfüllte Tätigkeit. „For example, before we can apply a given relation to a particular problem situation, we must first apprehend a structural isomorphism between the problem situation and the relation“ (Booth, 1989, 57).

Um die Voraussetzungen für die Prozesse des Verstehens der Syntax und Semantik der Algebra zu untersuchen, werden in der Fachdidaktik die Eigenschaften wie *Structure Sense* und *Symbol Sense* als mentale Dispositionen diskutiert.

Einige Forscher wie z. B. Booth (1988)und Kieran (1992) vertreten die Meinung, dass die Schwierigkeiten der Schüler mit mathematischen Strukturen in Algebra die Schwierigkeiten reflektieren, die diese Schüler schon mit arithmetischen Strukturen in Zahlensystemen hatten. Nach Kieran (1988) bedeutet strukturelles Wissen die Fähigkeit, äquivalente Formen eines algebraischen Ausdrucks zu identifizieren. „Algebraisches Verständnis der Zahlbereiche erzielt man durch die Untersuchung ihrer algebraischen Struktur“ (Vollrath & Weigand, 2007, 22). Deshalb benötigen die Schüler schon vor der Verwendung von Variablen mehr Erfahrung im Beobachten und Generalisieren von geometrischen Mustern (vgl. Arcavi & Schoenfeld, 1988, 424), was zur Entwicklung von *Structure Sense* beitragen kann.

Linchevski und Livnech (1999) nutzten den Begriff *Structure Sense* zunächst für die Beschreibung der Schwierigkeiten der Schüler bei der Nutzung ihres Wissens über arithmetischen Strukturen in frühen Phasen des Algebralernens. Gegenstand ihrer Untersuchungen waren Fehler, die Schüler beim Lösen linearer Gleichungen machten. Etwa ein Drittel der von ihnen untersuchten Schüler scheiterte bei der Lösung einer linearen Gleichung wie $6+9 \cdot n = 60$ aufgrund der falschen Reihenfolge der Operationen, indem zunächst die Addition durchgeführt wurde, was zu einer Gleichung der Form $15 \cdot n = 60$ führte. Die Mehrheit der untersuchten Schüler haben bei der Berechnung arithmetischer Terme wie $5 + 6 \cdot 10 =$ spontan mit der Addition von 5 und 6 angefangen, obwohl ihnen die Regel „Punkt vor Strich“ bekannt war. Als Erklärung seines Vorgehens hat ein Schüler angegeben: „I have to know what to multiply with!“ (vgl. Linchevski & Livneh, 1999, 178).

Hoch & Dreyfus (2005) untersuchten die Schwierigkeiten von Schülern der Sekundarstufe I bei Aufgaben, in denen die bekannten Formeln in unbekannten Situationen einzusetzen waren, und zwar an Beispielen von Faktorisierungsaufgaben: die Struktur $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ wird z. B. in dem Term $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$ nicht widererkannt. Die beobachteten Schwierigkeiten erklären die Forscher durch den nicht vorhandenen Structure Sense. Dabei definieren sie den Begriff *Structure Sense* wie folgt: „A student is said to display structure sense if s/he can:

- Deal with a compound literal term as a single entity;
- Recognise equivalence to familiar structures;

- Choose appropriate manipulations to make best use of the structure. “

Viele Wissenschaftler äußern sich in ihren Arbeiten nur implizit zu diesem Thema. Steinbring (2001) z. B. verwendet den Begriff *Structure Sense* zwar nicht explizit, spricht aber ausdrücklich von Konstruktion von Beziehungen, Strukturen und Zusammenhängen im Sachkontext als Verbindung zwischen realen Kontexten und Mathematik. Dabei sind zwei Aspekte zu beachten, zum einen die internen Beziehungen in betrachteten Kontexten festzustellen, zum anderen die jeweiligen Strukturen zu durchschauen, sie in Beziehung zu stellen und gegebenenfalls die Gleichheit der Strukturen festzustellen. „Für Kinder sind solche externen Beziehungen und „Gleichheiten“ zwischen den oft so verschiedenartig aussehenden Sachkontexten meist sehr schwer zu erkennen“ (Steinbring, 2001, 179). Söbbeke (2005) fokussierte ihre Forschungen auf die von Steinbring erwähnten internen Beziehungen und untersuchte individuelle Herangehens- und Strukturierungsweisen von Grundschulkindern bei der Deutung von Anschauungsmitteln und bildlichen Darstellungen. Dabei konnte sie die Bandbreite der kindlichen Deutungsweisen von Anschauungsmitteln durch vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit beschreiben. Auch sie verwendet den Begriff *Structure Sense* nicht explizit. Es ist aber offensichtlich, dass die „Strukturierungsfähigkeit“ in Kontexten der visuellen Mustererkennung unter dem Begriff Structure Sense anzuordnen ist.

Allerdings reicht für den erfolgreichen Umgang mit Algebra allein das Vorhandensein von *Structure Sense* nicht aus. Um den semantischen Aspekt, d. h. die Rolle der Bedeutung von Symbolen hervorzuheben, wird in der Literatur der Begriff *Symbol Sense* verwendet. Arcavi (1994, 2005) definiert den Begriff *Symbol Sense* zwar nicht, nähert sich ihm aber durch Beschreibung seiner Aspekte an. Als wichstigstes Merkmal von *Symbol Sense* sieht Arcavi das, was er als „Friendliness with symbols“ bezeichnet. Damit meint er „An understanding of and an aesthetic feel for the power of symbols - how and when symbols can and should be used in order to display relationships, generalizations, and proofs which otherwise are hidden and invisible“ (Arcavi, 2005, 31). Als weitere Merkmale nennt er die Fähigkeiten, mit symbolischen Darstellungen zu manipulieren und deren Bedeutung zu verstehen; ein passendes Symbol für die Beschreibung eines Problems zu wählen sowie zu erkennen, dass Symbole in unterschiedlichen Kontexten unterschiedliche Rollen spielen können.

Structure Sense und *Symbol Sense* sind somit beide von entscheidender Bedeutung für den verständnisvollen Umgang mit Algebra, weshalb in diesem Bereich umfassende Erfahrungen mit passenden Aufgaben gesammelt werden müssen: „A focal goal of learning algebra at all levels therefore must be the acquisition of the practice of using signs (mostly presented as inscriptions on paper) as variables to express, construct, reflect and understand generality and variability“ (Dörfler, 2008, 159).

1.5 Zugänge zur Algebra

Die Frage, was die Schulalgebra thematisch beinhalten und wie sie unterrichtet werden soll, beschäftigt die Forschung weltweit schon seit langem. Eine Reihe von Forschern erkennt das Generalisieren, das Formalisieren und das Symbolisieren als Kerncharakteritika der algebraischen Betrachtung in Bezug auf unterschiedliche Aspekte der Algebra (Kieran, 1990; Harel & Tall, 1991; Sfard & Linchevski, 1994; Kaput, 1998; Lee, 1996; Radford, 1996; Mason, 2005).

Bednarz et al. (1996) analysieren vier Haupttendenzen in der gegewärtigen Forschung und Entwicklung der Schulalgebra unter verschiedenen Perspektiven: Perspektive der Generalisierung, Perspektive des Problemlösens, Perspektive der Modellierung und Funktionale Perspektive. Diese verschiedenen Perspektiven sprechen unterschiedliche Rollen der Algebra an und betonen jeweils unterschiedliche Aspekte des algebraischen Denkens, die für eine sinngebende Auseinandersetzung mit fundamentalen algebraischen Konzepten entwickelt werden sollten. Eine fünfte durch Bednarz et al. (1996) präsentierte Perspektive ist die historische, die nicht als alternativer Weg, Algebra in der Schule einzuführen, zu verstehen ist. Vielmehr zeigen die Autoren, dass diese Perspektive als wertvolles pädagogisches Werkzeug parallel zu den o. g. Zugängen benutzt werden kann und soll. „Historical analysis permits us to better understand the advances, oppositions, and steps backward in the evolution of a knowledge system. (...) History also affords us a framework for analysing those situations that led to the creation of algebraic knowledge“ (Bednarz et al., 1996, 5). Allerdings betont Radford (2001), dass die Trends in der historischen Entwicklung der Algebra eine Grundlage für ein besseres Verstehen der Tiefe sowie verschiedene soziokulturelle und kognitive Bedeutungen des algebraischen Denkens sein können. Dies öffnet Lehrern neue Wege für den Algebraunterricht (vgl. Radford, 2001, 34).

Dieselben Forscher erkennen an, dass diese Aufteilung in verschiedenen Perspsktiven vereinfacht und unvollständig ist, jedoch bemerken die Autoren, dass ihre Klassifikation hilfreich sei, um der Diskussion über wesentliche Probleme der Schulalgebra einen strukturierten Rahmen zu verleihen (vgl. Bednarz et al., 1996, 325).

Etwa 10 Jahre zuvor formuliert Usiskin (1988) die These, dass Zielsetzungen des Algebraunterrichts, Konzeptionen von Algebra und Verwendungsweisen von Variablen voneinander untrennbar sind: „Purposes for algebra are determined by, or are related to, different conceptions of algebra, which correlate with different relative importance given to various uses of variables“ (Usiskin, 1988, 11). Er unterscheidet vier Konzepte der Schulalgebra: Algebra als generalisierte Arithmetik, Algebra als Studium von Verfahren zum Lösen bestimmter Probleme, Algebra als Studium von Beziehungen von Größen und Algebra als Untersuchung von Strukturen. In jedem dieser Konzepte tritt ein Buchstabensymbol/eine Variable jeweils in einer unterschiedlichen Rolle auf: als Muster-Generalisierer („a pattern generalizer“), als Unbekannte oder Konstante („unknowns or constants“), als Argument oder Parameter (an „argument or a parameter“) und als beliebiges Objekt („an arbitrary object“). Usiskin spricht als einer der ersten Forscher einen vesentlichen Unterschied bei der Verwendung von Algebra in Computer Science und in Mathematik an. Dies betrifft die Syntax und die Verwendung von Variablen: „Whereas in ordinary algebra, $x = x + 2$ suggests an equaotion with no solution, in BASIC the same sentence conveys the replacement of a particular storage location in a computer by a number two greater“ (Usiskin, 1988, 16).

Die Fachliteratur bietet eine Vielfalt an anderen Kategorisierungen. So verzeichnet z. B. Kaput (1998) fünf untereinander interagierende Formen des algebraischen Denkens: Algebra als generalisierte Arithmetik und Algebra als generalisiertes quantitatives Denken (u. a. Generalisieren und Formalisieren von Mustern); Algebra als syntaktisch-geführte Manipulation an Formalismen; Algebra als Studium von Strukturen und Systemen, abstrahierend von Relationen und quantitativen Aspekten; Algebra als Studium von Funktionen und Relationen; Algebra als Modellierungsprache für Phänomene.

„Was wir so kurzerhand benennen als „die Sache in mathematische Sprache übersetzen“, „abstrachieren“ usf. erweist sich bei genaueren Analysen als ein weites Kontinuum zwischen primärer Wahrnehmung und abstrakter Rekonstruktion, über das wir noch viel zu wenig wissen“ (Bauersfeld, 2004, 22). In diesem Zusammenhang untersucht Bertalan (2007) ausgehend von der Professoren-Studenten-Aufgabe, welche Auswirkungen die unterschiedlichen Arten der Verwendung von Buchstaben in der Mathematik auf den Zugang von Schülern zum Variablenbegriff haben können. Sie stellt Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Verwendungsweisen fest und kommt zu dem Schluss, dass die Unterschiede „im Grad der Abstrakheit der gedachten Referenzobjekte liegen“ (Bertalan, 2007, 33).

Ausgehend von der These, dass Algebralernen sich zusammensetzt aus einerseits dem Verstehen und andererseits der Fähigkeit, die wichtigsten Konzepte und formalen Möglichkeiten dieses mathematischen Gebiets anzuwenden, haben Dettori & Lemut (2001, 192) einen Versuch unternommen, eine gemeinsame Basis in klassischen und modernen Konzepten und Methoden herauszukristallisieren. Dieses Review führte zu der Liste von folgenden Themen und Fähigkeiten, die sich in der Schulalgebra wiederfinden sollten: 1) das Verstehen der Bedeutung von Funktionen (mit einer Variable); 2) das Verstehen der Bedeutung von Relationen; 3) das Verstehen des Unterschieds zwischen Variblen, Unbekannten und Parametern; 4) das Lernen, Algebra anzuwenden, d. h. Probleme oder Klassen von Problemen mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen zu modellieren; 5) das Lernen von regelgeleitetem Manipulieren von algebraischen Ausdrücken; 6) das Lernen, algebraisches Kalkül für das Beweisen von elementaren Sätze anzuwenden.

Der Bezug zur vorliegenden Arbeit

In der vorliegenden Arbeit werden keine vergleichende Analysen der o. g. Positionen unternommen, da eine solche ausführliche Diskussion den Rahmen der aktuellen Arbeit sprengen würde. Vielmehr schien es wichtig, einen Stand der Forschung wahrzunehmen sowie zu erkennen, welche Aspekte der Algebra und des Variablenbegriffs für die eigene Untersuchung von besonderer Bedeutung sind. Es wurden verschiedene Zugänge zur Algebra dargestellt, von welchen der Zugang durch Generalisierung ausgewählt wurde, um in dem vorliegenden Forschungsprojekt empirisch untersucht zu werden. Als Einstieg in die Algebra in gymnasialen fünften Klassenstufen wurde die Arbeit mit Mustererkennung und -beschreibung eingeführt. Aus wissenschaftlichen Studien gewonnene Erkenntnisse Steinbrings können an dieser Stelle als Legitimierung für diese frühe Einführung der Algebra in Generalisierungskontexten herangezogen werden: „In der Grundschule ist das neue mathematische Wissen in charakteristischer Weise an die situativen Lern- und Erfahrungskontexte der Schülerinnen und Schüler gebunden. Bei ihren Versuchen der Verallgemeinerung arithmetischer Beziehungen müssen die Kinder eigene situative Beschreibungen entwickeln ... Sie sind sehr wohl in der Lage, im Besonderen das Allgemeine zu sehen und mit eigenen Worten zu benennen“ (Steinbring, 2000b, 28).

„Nicht nur für den Mathematikunterricht der Grundschule wird immer wieder die Forderung nach der Benutzung von visuellen (und materiellen) Hilfen bei der Begriffsbildung und beim Aufgabenlösen erhoben. Dies steht durchaus im Einklang mit der Schlüsselrolle des „diagrammatischen Denkens“, die Peirce bereits vor mehr als einem Jahrhundert im Blick auf die „abduktive“ Hypothesenbildung analysiert hat“ (Bauersfeld, 2004, 15).

Die Beschäftigungen mit Mustern, also das Erkennen und Beschreiben von Strukturen, deren Verallgemeinerung und auch Konkretisierung sind zentrale Bestandteile des Zugangs: „Generalizing and specializing, the yin and yang of algebra, are the daily fare of this kind of approach“ (Lee, 1996, 105). Bei diesem Konzept werden Variablen als Symbole für das Beschreiben von erkannten Strukturen eingeführt und verwendet. Dabei steht jedoch bei den Schülern eine Entwicklung des Verständnisses für den Variablenbegriff, welcher zentrale Bedeutung in der Algebra hat, im Vordergrund: „The concept of variable is central to mathematics teaching and learning in junior and senior high school. Understanding the concept provides the basis for the transition from arithmetic to algebra and is necessary for the meaningful use of all advanced mathematics“ (Arcavi & Schoenfeld, 1988, 420). „Generalizing patterns is a strongly conceptual activity which does not result in a number but in a general conceptual structure presented with variables. In those pattern tasks the graphic or numeric items themselves can and should be taken as the (mathematical) objects of interest. Those diagrams (in the sense of Peirce) have to be investigated and they are of interest by themselves because of their structure and the actions and operations applicable to them“ (Dörfler, 2008, 159).

Der für diese Studie gewählte Einstieg in die Algebra, die Generalisierung in Mustererkennungskontexten, findet nach Lee seine Begründung in verschiedenen wissenschaftlichen Bereichen: „As an introduction to algebra, an entry into the culture, I think a generalizing approach is grounded historically, philosophically, and psychologically“ (Lee, 1996, 106).

Kapitel 2

Design der Untersuchung

Nach Aufzeigen der theoretischen Hintergründe der Arbeit in Kapitel 1, enthält das nachfolgende Kapitel einen transparenten Aufriss und eine Begründung des Untersuchungsdesigns.

2.1 Methodologie

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Methodologie der Studie. Darin werden methodologische Vorüberlegungen zu Methoden der mathematikdidaktischen Forschung angestellt und die Wahl eines Untersuchungsinstruments getroffen. Anschließend wird die hier eingenommene explorative Forschungsperspektive dargelegt.

2.1.1 Vorüberlegungen und Grundentscheidungen

In der mathematikdidaktischen Forschung ist im Wesentlichen zwischen zwei Methoden zu differenzieren: der *hypothesengenerierenden* und der *hypothesenprüfenden Methode* (Bohnsack, 2008; Merschmeyer-Brüwer, 2002). Letztere nutzt unter standardisierten Bedingungen erhobene, objektiv auswertbare Daten. Die *hypothesengenerierende Methode* hingegen verwendet meist Daten qualitativer Natur(vgl. Söbbeke, 2005, 79).

Hypothesenprüfende und hypothesengenerierende Verfahren

Die umfangreiche, intensiv geführte Diskussion der letzten Jahre über die begriffliche Erfassung mathematikdidaktischer Forschungsmethoden ist in der einschlägigen Literatur (Bortz & Döring, 2006; Oswald, 2003; Scherer, 1995; von Kardorff, 1995) eingehend dargestellt. Unter anderem wird dort zwischen *qualitativen* und *quantitativen* Methoden unterschieden. Bohnsack dagegen befürwortet vielmehr die Unterscheidung zwischen hypothesengenerierenden (rekonstruktiven) und hypothesenprüfenden Verfahrensweisen. „Es ist diese Gegenüberstellung und Abgrenzung, die ich für sinnvoll und begründbar halte, nicht aber jene von qualitativer und quantitativer Sozialforschung“ (Bohnsack, 2008, 10).

Vorliegend werden lediglich einige Kritikansätze gegenüber den hypothesenprüfenden und -generierenden Methoden erwähnt.

Gegen das *hypothesenprüfende Verfahren* werden Einwände erhoben, dass eine zugrundeliegende Theorie die Forschungsperspektive und Datenanalyse stark beeinflussen kann, weil sie die Wahrnehmung strukturiert und zu selektiven Beobachtungen verleitet (vgl. Bohnsack, 2008, 29f). Bei diesen Verfahren besteht somit die Gefahr, dass passende Beispiele zur Bestätigung der Theorie ausgewählt werden. Ferner können empirische Erhebungen, die zwangsläufig mit endlichen Stichproben arbeiten, allgemeine Gesetzeshypothesen im Sinne von All-Aussagen prinzipiell nicht verifizieren, weil eine einzige konträre Beobachtung reichen würde, um sie zu widerlegen. Ein weiterer Einwand gibt zu bedenken, dass man nur in beschränktem Maße Einblick in Denkweisen und Begründungszusammenhänge von Individuen erhalten kann (vgl. Söbbeke, 2005, 79). Dabei ergibt sich zusätzlich das Problem, dass eine Standardisierung die Forschungskommunikation einengt und die Kommunikationsmöglichkeiten der Probanden beschneidet, so dass die Validität der Methode fraglich werden kann (vgl. Bohnsack, 2008, 17).

Bei der *hypothesengenerierenden Methode* werden Zweifel bzgl. der Anwendbarkeit der klassischen Gütekriterien der Reliabilität, der Validität und der Objektivität geäußert (vgl. Flick et al., 1995, 167). Insbesondere werden die „geringe Stichprobengröße, mangelnde Objektivität und damit fehlende Kontrolle und Generalisierbarkeit der Ergebnisse“ kritisiert (Söbbeke, 2005, 79). Ein anderer Kritikpunkt ist, dass die Bedeutung des Gesagten nicht eindeutig aus einer Äußerung hervorgehen muss. In unserer alltäglichen sprachlichen Verständigung sind sprachliche Äußerungen lediglich Indikatoren für Hinweise auf Bedeutungen (vgl. Bohnsack, 2008, 19). Die Interpretation der Äußerungen wird daher als spekulativ bewertet (vgl. Hopf, 1995, 124).

Die Wahl der Methode in der vorliegenden Untersuchung war durch das Forschungsinteresse geleitet. Da die eigene Studie vor allem das Generieten von Hypothesen zur Entwicklung des algebraischen Denkens bei Fünftklässlern zum Gegenstand hat, werden explorative Methoden eingesetzt. Insbesondere der Einwand mangelnden individuellen Zugangs zu den Probanden in hypothesenprüfenden Verfahren beeinflusste die Entscheidung zugunsten der *hypothesengenerierenden Methode*. Um jedoch dem Kritikpunkt fehlender Generalisierbarkeit aufgrund kleiner Stichprobengrößen entgegen zu wirken, werden Stichproben verschiedener Gymnasien aus unterschiedlichen Ländern und kulturellen Einbindungen genommen.

Ausgehend von einem in Bohnsack (2008, 10) angeführten *rekonstruktiven Ansatz*, untersucht die vorliegende Studie die individuellen Herangehensweisen, Generalisierungs- und Formalisierungsprozesse von Kindern in arithmetischen und geometrischen Kontexten.

„Der rekonstruktive Aspekt ergibt sich daraus, dass die für die Interpretation leitenden Kategorien aus dem Material selbst gewonnen werden. Zugrundeliegende theoretische Vorannahmen sind zu Beginn noch offen gehalten. Sie konkretisieren sich aber im Zuge von Materialerhebungen einzelner (Vor-)Studien zunehmend, so dass schließlich eine theoriegeleitete Interpretation im Rahmen der Hauptstudie möglich wird“ (Merschmeyer-Brüwer, 2002, 31). In der eigenen Studie diente dabei der erste Zyklus als Vorstudie.

Befragungsmethoden hypothesengenerierender Verfahren

Die im Sinne des Forschungsinteresses zu erhebende Datensammlung kann durch unterschiedliche Befragungsmethoden erreicht werden. Neben schriftlichen Tests, Unterrichtsprotokollen und nachträglichen Interviews (vgl. Stein, 1986, 140) kommen auch die Befragungsmethoden des „lauten Denkens“ (Ericsson & Simon, 1980, 1987, 1993; Zimmermann, 1977) sowie des „informellen“ (Ginsburg, 1977, 174) bzw. „klinischen“ Interviews (Hasemann, 1986, 23) in Betracht.

Lautes Denken

Für die Kognitionsforschung hat die *Methode des lauten Denkens* eine besondere Bedeutung. Denn will man beispielweise untersuchen, „wie Informationsverarbeitungsprozesse ablaufen bzw. welche „Denkwege“ bei der Lösung komplexer Probleme eingeschlagen werden, sind verbale Selbstauskünfte unverzichtbar“ (Bortz & Döring, 2006, 325). Ziel des *lauten Denkens* ist es, zu erfahren, welche kognitiven Prozesse während der Bearbeitung einer Aufgabe ablaufen. Dabei gibt nicht nur das Ergebnis, sondern vielmehr der Lösungsweg selbst darüber Aufschluss. Die Versuchsperson soll bei der Bearbeitung einer Aufgabe davon berichten, was sie denkt, welchen Teilschritt sie auf welche Art und Weise bearbeitet. Von Bedeutung ist hierbei, dass alle Gedanken – auch jene, die der Versuchsperson vielleicht unwichtig erscheinen – ausgesprochen werden. Die während der Bearbeitung einer Aufgabe ablaufenden kognitiven Prozesse sollen am besten durch „gleichzeitiges, d.h. *simultanes Lautes Denken* erfasst werden können“ (Farkas, 2003, 38). Damit findet eine *unmittelbar folgende Introspektion* statt, d.h. die Gedanken werden unmittelbar während und nach Bearbeitung der Aufgabe verbalisiert. Die Methode des *lauten Denkens* erlaubt die Erforschung sowohl der komplexen, das Problemlösen ausmachenden Aktivitäten, als auch der zugrundeliegenden internen Mechanismen (vgl. Ginsburg, 1983, 8-10).

Die Äußerungen der Probanden werden ohne Interpretation durch den Versuchsleiter möglichst objektiv in einem Protokoll festgehalten, wobei zur Erleichterung einer anschließenden Analyse die Sitzung oftmals aufgenommen und transkribiert wird. Die Rolle des Versuchsleiters ist beim *lauten Denken* eng darauf begrenzt, die Versuchsperson bei etwaigen Redepausen zum Weiterreden zu animieren (vgl. Zimmermann, 1982, 183). Die gewonnenen Daten sind dadurch „relativ unbeeinflusste Berichte über die Aufgabenlösungen“ (Hasemann, 1986, 23). Außerdem bleibt nach Rüede (2009) beim Denken vieles implizit und wird gar nicht als etwas zu Benennendes bewusst gemacht.

Hauptquelle der für das mathematische Denken bedeutsamen Information über kognitive Prozesse, Strukturen und Wissen sind oftmals die verbalen Daten (vgl. Hasemann, 1986, 28). Da nur der Betroffene selbst seines geistigen Tuns gewahr ist, ist seine mentale Welt im Wesentlichen verborgen. „Psychological research *must* rely on verbal reports of the subject, for no one else could *possibly* be in a position to observe them“ (Ginsburg, 1983, 23). Jedoch können selbst die besten Protokolle des *lauten Denkens* nur eine unvollständige Abbildung dessen liefern, was tatsächlich im Kopf der Versuchsperson vor sich geht: „We will conceive of the record verbalizations as data (...). This means that we will not assume that the verbalized description accurately reflects the internal structure of processes or of heeded information, or that it has any privileged status as a direct observation“ (Ericsson & Simon, 1980, 217). Farkas (2003, 38) weist darauf hin, dass introspektive Methoden mit mehreren, bei der Auswertung der Verbalisierung zu beachtenden Problemen verbunden sind. Zum einen sind die Probanden mit hohen kognitiven Anforderungen konfrontiert, insbesondere dem gleichzeitigen Aufgabenlösen und der Verbalisierung der Denkprozesse. Dadurch entstehen Kapazitätsprobleme. Zum anderen sind es Auswahlprobleme: der Proband muss „bewusst oder unbewusst auswählen, was er auch verbalisiert“ (Farkas, 2003, 38). Die Verbalisierung ist jedoch schon das Produkt der zuvor abgeschlossenen inneren Auswahl des Probanden (vgl. Hasemann, 1986, 27).

Klinisches Interview

Die Befragungsmethode des *klinischen Interviews* ist eng mit dem Namen Jean Piagets verbunden, bei dessen Arbeiten zur Erforschung der Psychogenese die „méthode clinique“ eine wesentliche Rolle spielte (Hasemann, 1986; Wittmann, 1982; Ginsburg, 1981). Diese Methode ist der des *lauten Denkens* ähnlich, jedoch spielt die Interaktion zwischen Interviewer und Versuchsperson dabei eine größere Rolle.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts stellten sog. standardisierte Tests ein gängiges Verfahren dar. Standardisierte Tests sind dadurch geprägt, dass sowohl Wortlaut als auch Reihenfolge der gestellten Fragen – ebenso wie die gewünschten Antworten – bereits zuvor feststehen. Piaget waren solche Tests jedoch zu zielgerichtet und damit nicht geeignet, der Vielschichtigkeit und Unvorhersehbarkeit gedanklicher Wege gerecht zu werden. Während seiner Tätigkeit an verschiedenen psychiatrischen Instituten konnte Piaget Erfahrungen mit der klinischen Methode sammeln, die sich insbesondere dadurch auszeichnet, dass der Psychotherapeut den Patienten durch vorsichtiges Nachfragen zur Offenbarung seiner Gedanken anregt. Piaget wählte das *klinische Interview* als Mittelweg zwischen dem allzu starren standardisierten Verfahren und der konträren Methode freier Beobachtung, um möglichst gut nachzuvollziehen, welche Denkprozesse den Äußerungen und Handlungen der Versuchspersonen zugrundelagen. Die Methode der freien Beobachtung schied für Piaget als Mittel zur Erforschung menschlicher Gedankenwelten aufgrund ihrer großen Offenheit und der damit verbundenen Gefahr der Beliebigkeit aus (vgl. Hasemann, 1986, 23). Da in der ursprünglichen Version der klinischen Methode jedoch das zuweilen fehlende Vermögen der Kinder, ihre Gedankengänge zu verbalisieren, nicht ausreichend Berücksichtigung fand, entwickelte Piaget eine Methode, die neben den Fragen und Antworten das Kind zusätzlich dazu anregte, mit Material zu hantieren. Neben verbalen Äußerungen sind damit auch die Handlungen des Kindes in die Analyse des Interviews geflossen. Hauptintention dieser Methode ist es, die hinter den Antworten des Kindes liegenden geistigen Strukturen offen zu legen und mehr darüber zu erfahren, wie Kinder denken. „Durch den Dialog können die Kinder sehr gut motiviert werden, aus sich herauszugehen“ (Wittmann, 1982, 38).

In der mathematikdidaktischen Forschung wird heute nicht mehr zwischen *klinischen Interviews* und *revidierenden klinischen Interviews* unterschieden, sondern vielmehr ein einheitlicher Begriff des klinischen Interviews verwendet. Dieser Begriff wird auch in dieser Arbeit generell benutzt werden.

Das *klinische Interview* kann in Abgrenzung zur freien Beobachtung und dem standardisierten Test als *halbstandardisiertes Verfahren* bezeichnet werden. „Entscheidend für die Abgrenzung zu standardisierten Interviews ist, daß es im Interview keine Antwortvorgaben gibt und daß die Befragten ihre Ansichten und Erfahrungen frei artikulieren können“ (Hopf, 1995, 177). Durch den im Einzelnen nicht vorherbestimmten Verlauf wird die Unvorhersehbarkeit der Gedankenwege berücksichtigt. Andererseits wird durch verbindlich festgelegte Kernfragen dem Kriterium der Vergleichbarkeit Rechnung getragen. „In der Regel werden die Interviewerinnen und Interviewer bei teilstandardisierten – auch bei relativ stark strukturierten – Interviews zugleich dazu aufgefordert, die im Leitfaden vorgegebenen Fragen nach eigenem Ermessen und nach Einschätzung des theoretischen Anliegens der jeweiligen Studie durch klärende Nachfragen zu ergänzen und Gesichtspunkte aufzugreifen, die von den Befragten unabhängig vom Gesprächsleitfaden in die Interviewsituation eingebracht werden, sofern diese im Fragekontext der Untersuchung als bedeutsam erscheinen“ (Hopf, 1995, 177). Somit eignet sich das Interview zur Feststellung und Beurteilung mathematischen Denkens: „the individual interview is a useful tool for assessing students’ mathematical thinking“ (Schoen, 1979, 34).

Die oben kritisch konstatierten Kapazitäts- und Auswahlprobleme beim *lauten Denken* gelten grundsätzlich auch beim *klinischen Interview*. Dem Problem der Verbalisierung kann der Interviewer zwar durch Nachfragen oder Erzeugen von Konflikten entgegentreten (vgl. Hasemann, 1986, 27), jedoch wird dadurch in die mentalen Prozesse der Versuchsperson eingegriffen. Auch muss der Interviewer damit rechnen, dass die Probanden diese Fragen unterschiedlich auffassen. Dies trägt dem Ziel der Generalisierbarkeit nicht bei. Ferner ist der enorme zeitliche Aufwand bei *klinischen Interviews* nicht außer Acht zu lassen: „An obvious disadvantage of using the interview for assessment is the amount of time required for administration. It is simply not feasible to interview frequently every individual child“ (Schoen, 1979, 37). Jedoch eröffnet die Interviewanalyse dem Forscher „einen strukturierten sowie recht plausiblen und aussagekräftigen Blick auf individuelle Denkprozesse und Phänomenzusammenhänge einzelner Kinder, der den ausgesprochen hohen Zeitaufwand bei einer sehr geringen Anzahl an Probanden rechtfertigt“ (Nührenbörger, 2002, 122)(vgl. dazu Wittmann, 1982, 38f.). Ferner eignet sich die Methode des Interviews zur Behandlung schwieriger Inhalte: „As a rule, the interview is especially useful when the learning task is difficult“ (Schoen, 1979, 37). Durch Kombination unterschiedlicher Fragestellungen können sich die Versuchsperson und der Interviewer dem betreffenden Thema von verschiedenen Seiten nähern. Folglich wächst mit dieser Vorgehensweise auch die Anzahl und Qualität der Indizien und damit auch die Anzahl der Interpretationsmöglichkeiten. Wesentliche Stärke der Erhebungsmethode des *klinischen Interviews* liegt darin, daß „unter relativ normierten Bedingungen der Argumentationsprozeß des Schülers beobachtet werden kann“ (Stein, 1986, 144).

Jede Kommunikation, insbesondere die Kommunikation zwischen dem Probanden und dem ihm fremden Interviewer, wirft Verständigungsprobleme auf (vgl. dazu z. B. Wittmann, 1982, 38). „Empirische Methoden zu entwickeln bedeutet also u.a., diesen Prozess des Fremdverstehens zu kontrollieren. Man spricht deshalb auch im Rahmen der interpretativen Methodologie von *methodisch kontrolliertem Fremdverstehen*“ (Bohnsack, 2008, 19). Um diese Kontrolle zu erreichen, wird der Verlauf der Kommunikation vorstrukturiert und standardisiert, „um auf diese Weise die Reproduzierbarkeit der Prozesse der Erhebung und Auswertung sicherzustellen, durch die intersubjektive Überprüfbarkeit hergestellt werden soll. (...) *Methodische Kontrolle* bedeutet (...) Kontrolle über die Unterschiede der Sprache von Forschenden und Erforschten, über die Differenzen ihrer Interpretationsrahmen, ihrer Relevanzsysteme“ (Bohnsack, 2008, 19ff.). Unbedenklich können klinische Interviews jedenfalls bei der Generierung von Hypothesen eingesetzt werden (vgl. Hasemann, 1986, 28).

Methodologische Entscheidung

„Die Unterrichtswirklichkeit ist für den Lehrer eine andere als für den Schüler“ (Voigt, 2003, 790), die individuellen Vorgehensweisen der Lernenden können sich auch auf unterschiedlichen Darstellungsebenen artikulieren – sprachlich, zeichnerisch, handelnd, formal. Für einen tieferen Einblick in die individuellen Schülerperspektiven ist ein direktes Wissenschaftler-Schüler-Gespräch sinnvoll, wofür die Methode des Interviews bzw. des lauten Denkens geeignet ist (vgl. Voigt, 2003, 790). *Lautes Denken* bedeutet, Gedankengänge frei zu äußern, während *klinische Interviews* in der Regel auf gezielte Fragestellungen ausgelegt sind. Allerdings sind auch Mischformen der Befragungsmethoden des *lauten Denkens* und der des *klinischen Interviews* möglich, etwa wenn das klinische Interview einerseits zum lauten Denkens auffordert und andererseits flexible Fragetechniken aufweist (vgl. Hasemann, 1986, 24).

Auf der Basis dieser Überlegungen wurde daher eine Befragungsmethode gewählt, die Elemente des *klinischen Interviews* mit denen des *lauten Denkens* verbindet. Die vorligende Arbeit stützt sich auf die Analyse der Interviews mit 24 Probanden.

2.1.2 Explorative Forschungsperspektive

Die durchgeführte Studie kann am besten als exploratives Forschungsprojekt beschrieben werden, d. h. der zugrundeliegende Arbeitsprozess hat einen zyklischen Verlauf, in dem theoretische Überlegungen in die Planung und Realisierung der darauffolgenden Projektschritte einfließen. Dadurch bildet sich eine Reihe von Untersuchungszyklen heraus, wobei jeder Zyklus aus den Elementen der Analyse, der Konzeption und der Realisierung besteht (Abb. 2.1). Der 3. Zyklus ist unvollständig, da er nach Analyse der Ergebnisse der Untersuchungsphase II in die Auswertung der Gesamtstudie und die Erstellung von Hypothesen übergeht.

Die in zwei Phasen aufgeteilte Interviewstudie mit einer zwischengeschalteten Intervention wird in den folgenden Kapiteln nach Intention, Inhalt und Ablauf im Detail beschrieben.

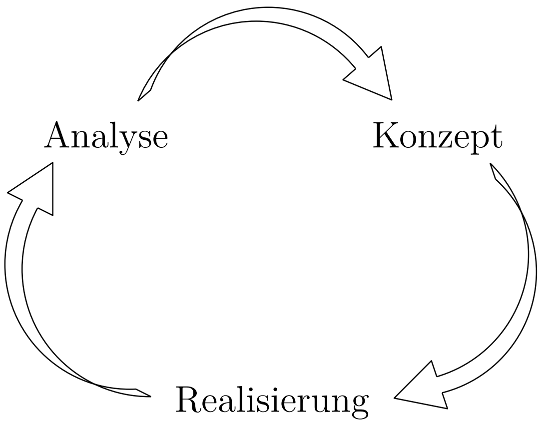


Abbildung 2.1: Untersuchungszyklus

2.2 Aufbau der Studie

Dargestellt wird hier der Aufbau der durchgeführten Studie. Es erfolgt eine Skizzierung der Untersuchungsphasen im Überblick sowie die Beschreibung der Gestaltungsaspekte des Interviews. Die Entscheidung bezüglich des Aufbaus der Studie hing unmittelbar mit den Forschungsfragen und den methodologischen Vorüberlegungen zusammen.

2.2.1 Untersuchungsphasen im Überblick

Der Schwerpunkt des Forschungsinteresses liegt in der Art und Weise, wie 10–11-jährige Kinder in beobachteten Strukturen allgemeine Aspekte erkennen und formal zum Ausdruck bringen. In Bezug auf die Qualität der Untersuchungsmethode stellt sich die Frage, inwiefern einzelne Ergebnisse weniger Datenerhebungen ein möglichst großes Spektrum an unterschiedlichen Fällen widerspiegeln können. Der Begriffsbildungsprozess eines Kindes wird durch eine Vielzahl subjektiver Faktoren beeinflusst. Darunter fallen insbesondere die soziale und kulturelle Einbindung in eine Gemeinschaft an einem Ort, sowie die didaktisch-methodische Arbeitsweise des jeweiligen Mathematiklehrers. Um diese Faktoren zu kompensieren und dadurch – neben übereinstimmenden Parametern, wie etwa dem Kindesalter, der Untersuchungsmethode, dem Ablauf und Inhalt des Interviews sowie der interviewenden Person – eine gewisse Objektivität der erhobenen Daten zu gewährleisten, liegt eine Entnahme von Stichproben an verschiedenen Orten nahe. Hierfür sind Kinder aus nicht nur unterschiedlichen Klassengemeinschaften und mit unterschiedlichen Ma-

		Theoretische Überlegungen		Praktische Ausführung
		Analyse	**Konzept**	**Realisierung**
	Mai '06			Organisationsmaßnahmen an den Gymnasien DE/RU
Zyklus 1	Juni	Analyse der Ausgangslage an beteiligten Gymnasien		
	Juli		Konzeption der Aufgaben und Abläufe für Interview I	
	August			Untersuchungsphase I: Interview I in DE / RU
	Sept.			
Zyklus 2	Okt.	Auswertung der Daten, Analyse der Ergebnisse der Untersuchungsphase I		
	Nov.			
	Dez.		Konzeption der Aufgaben und Abläufe für Unterrichtsaktivitäten und Interview II	
	Jan. '07			
	Feb.			Unterrichtsaktivitäten: Einführung des Variablenbegriffs und Bearbeitung der Arbeitsblätter
	März			
	April			
	Mai			Untersuchungsphase II: Interview II in DE / RU
	Juni			
Zyklus 3	Juli	Auswertung der Daten; Analyse der erhobenen Daten		
	August			

Abbildung 2.2: Zeitliche Übersicht über die Studie

thematiklehrern, sondern auch aus unterschiedlichen Gymnasien, Stadtteilen, Kulturen und mit unterschiedlichen Muttersprachen in die Studie einbezogen worden. Zu diesem Zweck wird die Untersuchung als ein binationales Projekt in Deutschland und Russland durchgeführt.

Auf der Grundlage der dargestellten Überlegungen (vgl. Kapitel 2.1) wurde der Aufbau der Studie in zwei Untersuchungsphasen – Interview I und Interview II – mit dazwischenliegenden Unterrichtsaktivitäten zur Einführung der algebraischen Symbolsprache aufgeteilt (zeitliche Übersicht vgl. Abb. 2.2).

Der Ablauf der Studie wurde somit von zwei Hauptelementen geprägt: den Unterrichtsaktivitäten und den Interviews, wobei letztere als Instrumente der Datenerhebungen dienten.

Die erste Phase – Interview I – war für den Beginn des Schuljahres geplant und als zweiteiliges Interview mit Paaren von Kindern der Jahrgangsstufe 5 konzipiert. Dazu wurden innerhalb einer Woche jeweils zwei zeitlich getrennte Treffen à ca. 40 Minuten pro Probandenpaar vorgesehen. Die Aufteilung des Interviews auf zwei Termine erfolgte aus altersspezifischen, aber auch aus psychologischen Gründen. Zum einen wurden den Kindern eine Reihe von Aufgaben und Fragen gestellt, deren Bearbeitung – mit Rücksicht auf die für die Vorstellung und Einführung benötigte Zeit – eine längere Zeitspanne als eine Unterrichtsstunde erforderte. Ohne zeitliche Zäsur wäre es zu einer unnötigen Überforderung sowie zu einem deutlichen Herabsinken der Konzentrations- und Arbeitsfähigkeit der Kinder und damit zu einer ergebnisverzerrenden Beeinflussung gekommen. Zum anderen eröffnete die Aufteilung auf zwei Sitzungen den Probanden die Möglichkeit, mit der ungewöhnlichen Situation besser zurechtzukommen. Das zweite Gespräch verlief bei allen Paaren stets als ein Treffen von „guten Bekannten“. Die in der ersten Sitzung unter Umständen leicht angespannte Atmosphäre konnte deutlich gelockert werden.

Gegenstand der beiden Sitzungen waren Aufgaben aus der Arithmetik, in denen in symbolischen oder diagrammatischen Darstellungen Strukturen bzw. Muster zu erkennen waren. In dieser Phase galt es,

- Strukturierungsvermögen
- Sicht- bzw. Vorgehensweise
- Art der Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten und Zahlenbeziehungen

bei denKindern zu untersuchen. Die in der Studie verwendeten Aufgabenstellungen werden in Kapitel 2.3 ausführlich und begründet dargestellt.

Die Auswertung und Analyse des Datenmaterials der Untersuchungsphase I leiteten den zweiten Zyklus der Studie ein. Darin wurden die Aufgaben konzipiert und die Abläufe geplant, sowohl für die Unterrichtsaktivitäten als auch für die darauffolgende Untersuchungsphase II. In den Unterrichtsstunden haben die Kinder erste Begegnungen mit der Formelsprache gemacht. Diese Aktivitäten erstreckten sich über einen Zeitraum von drei Monaten, in dem die Schüler episodisch – zusätzlich zum laufenden Unterrichtsstoff – die Verwendung einfacher algebraischer Symbole kennenlernten. Die beteiligten Lehrer führten den Begriff der Variablen im Mathematikunterricht ein, indem sie den Schülern beispielbezogen vermittelten, dass Buchstaben als Stellvertreter für Zahlen verwendet werden können, um allgemeine Zusammenhänge zum Ausdruck zu bringen. Eine solche instruierende Einführung entspricht dem klassischen Eulerschen Ansatz aus „Vollständige Anleitung zur Algebra“: „Um die Sache allgemein zu machen, werden statt der wirklichen Zahlen Buchstaben gebraucht“ (Euler, 1959, 18).

Die zweite Untersuchungsphase – Interview II – diente dem Ziel zu ermitteln, wie weit die Kinder mit diesen bereitgestellten Werkzeugen verständig umgehen. Die Interviews dieser Untersuchungsphase fanden etwa einen Monat nach Abschluss der Unterrichtsaktivitäten der Studie und kurz vor Ende des Schuljahres statt. Darin wurde den gleichen Probanden – diesmal in Einzelsitzungen – ein Set aus Aufgaben unterschiedlicher Formate angeboten, die thematisch mit den Aufgaben aus der Untersuchungsphase I verbunden waren. Die Einzelinterviews dienten einer differenzierteren Erfassung der bei der Verwendung von Variablen auftretenden Schwierigkeiten, sowie einer Einsicht in individuelle Deutungsprozesse der Kinder. In dieser Phase galt es Folgendes zu untersuchen:

- Deutung der Variablen in unterschiedlichen Referenzkontexten;
- Verwendung der formalen Sprache bei Beschreibung der Allgemeinheit;
- Aufspüren von damit verbundenen Schwierigkeiten und Hürden.

In den Untersuchungsklassen sind zwei Monate nach Beginn des Schuljahres jeweils sechs Schüler aus einer Gruppe von Freiwilligen gewählt worden. Die Auswahl der Probanden wurde aus forschungspraktischen Gründen völlig den dortigen Lehrkräften überlassen, mit der Bitte, aus ihrer subjektiven Einschätzung heraus Kinder verschiedener Leistungsbereiche auszuwählen. Vorgreifend ist hierbei anzumerken, dass die Lehrkräfte dieser Bitte in vollem Umfang nachgekommen waren. Die späteren Untersuchungsergebnisse zeigen, dass die Heterogenität der Leistungsbereiche tatsächlich gewährleistet wurde. Im Hinblick auf die Forschungsinteressen sind dabei weder Vortests noch qualitative Untersuchungen zum Mathematikunterricht in den jeweiligen Klassen durchgeführt worden. Eine entsprechende schriftliche Einwilligung der Eltern zu den Interviews und den Videoaufzeichnungen wurde eingeholt.

An dieser Stelle ist auf die Stellung der Jahrgangsstufe 5 in den Schulsystemen in Deutschland und Russland hinzuweisen. In beiden Ländern ist die Jahrgangsstufe 5 nach erfolgreichem Abschluss einer Grundschule das erste Jahr der Mittelstufe. Die deutsche Grundschule bildet dabei jedoch eine separate, von anderen Schulformen autonome Institution; die Grundschulkinder haben in ihrem Alltag nur mit anderen Grundschulkindern und Lehrern Umgang. Im Gegensatz hierzu ist die russische Grundschule fest intergrierter Bestandteil einer Schulform, welche mindestens die Mittlere Reife gewährleistet (d.h. Haupt-, Realschule oder Gymnasium). Dieser grundlegende Unterschied spielt beim Wechsel aus der Grundschule in die Mittelstufe eine große Rolle. In Deutschland werden nach der Grundschulzeit die Karten neu gemischt: die Fünftklässler finden sich in einer neuen Umgebung mit zahlreichen, meist unbekannten Mitschülern sowie vielen vollkommen unbekannten Fachlehrern wieder. Mit dieser schwierigen Situation müssen sie zunächst zurechtkommen und neue Kontakte knüpfen. Ein Zusammengehörigkeitsgefühl einer Klasse als Einheit muss sich dabei erst langsam entwickeln. In Russland bleiben die Klassengemeinschaften hingegen schon ab dem 1. Schuljahr nahezu vollständig bestehen. Die Schüler werden in den ursprünglichen Einheiten im gleichen Gebäude weiter unterrichtet. Ferner lernen die russischen Schüler ihre zukünftigen Fachlehrer und Klassenbetreuer bereits im Grundschulalter kennen. Um den Kindern einen möglichst reibungslosen Übergang in die Mittelstufe zu ermöglichen, sind die Lehrkräfte der Mittelstufen verpflichtet, im zweiten Halbjahr des vierten Schuljahres in ihren künftigen Klassen der Jahrgangstufe 5 zu hospitieren und sich dort vorzustellen.

Die von der Autorin interviewten Paare von Fünftklässlern deutscher und russischer Gymnasien befanden sich dadurch in wesentlich verschiedenen sozialen Umgebungen. Während die russischen Kinder bereits eine gewisse Zeit Klassenkameraden oder gar Tischnachbarn in der Grundschule waren und Erfahrungen im Umgang miteinander hatten, kannten sich die deutschen Kinder erst seit wenigen Wochen. Dies war auch ein Grund dafür, eine Interaktion zwischen den Probanden nicht zum Bestandteil der Untersuchung zu machen, sondern ausschließlich auf die Einzelleistungen zu achten.

In Absprache[1] mit der Schulleitung, den Lehrkräften und den Eltern, sowie den zuständigen Behörden fanden die Interviews während der Schulzeit in den Kindern vertrauten Räumen der jeweiligen Schule, namentlich einem Klassenzimmer oder der Schulbibliothek, statt. Die Interviews sind von einem Assistenten der Autorin mit Hilfe einer Videokamera festgehalten worden. In Deutschland sind hierfür Studenten herangezogen worden, die in den entsprechenden Gymnasien das Fachpraktikum Mathematik absolvierten; in Russland waren dies freiwillige Schüler der Oberstufen.

Der Entscheidung, die Interviews in der Untersuchungsphase I mit Paaren durchzuführen, lagen folgende Erwägungen zugrunde: zum einen ist für ein erfolgreiches Zustandekommen eines Gespräches zwischen der zu interviewenden Person und der Interviewerin eine entspannte und vertrauensvolle Atmosphäre von immenser Bedeutung. Für ein 10 – 11-jähriges Kind bedeutet eine Konfrontation mit einer gänzlich fremden Person, verbunden mit der Herausforderung, Aufgaben zu lösen und eigene Gedankengänge vor der laufenden Kamera erläutern zu müssen, eine Situation mit besonders hohem Stressfaktor. Dieses Phänomen ist bekannt, sodass die damit verbundene Anspannung des Kindes zu Recht als Kritikpunkt an klinischen Interviews als Untersuchungsinstrument benannt wird. Der Umstand, dass sich das Kind in Gesellschaft eines – in gleicher Situation befindlichen und ihm bekannten – Mitschülers befand, mit dem es sich austauschen konnte, stellte eine psychologische Stütze für beide Probanden dar.

In der Untersuchungsphase II – Interview II – ist diese Stütze nicht mehr erforderlich. Den Probanden ist die Interviewerin, die Situation eines Interviews sowie dessen Verlauf bekannt. Daher kann diese Phase in der Regel ohne Angst vor Stresssituationen in Einzelinterviews durchgeführt werden. Nur in einem einzigen Fall hatte sich ein Kind im Interview II alleine unwohl gefühlt und um die Anwesenheit eines Mitschülers gebeten. Dieser Wunsch wurde natürlich erfüllt, wobei sich der Mitschüler jedoch nicht am Interview beteiligte.

[1] Aus Datenschutzgründen wurde auf die Erfassung jeglicher Sozialdaten verzichtet. Außerdem wurden die Namen der einzelnen Kinder verändert.

2.2.2 Gestaltungsaspekte der Interviews

Bei dieser halbstandardisierten Interviewreihe wurden Schüler eines fünften Jahrgangs verschiedener Gymnasien interviewt, d. h. sie bekamen Aufgaben gestellt, die sie dann bearbeiten und deren Lösungswege sie erklären sollten. Die Aufgabenreihenfolge war zwecks Vergleichbarkeit bei allen Kindern gleich festgelegt. Das Interview wurde von einer Interviewerin geführt, die an den wichtigen Stellen mit Fragen aus einem vorformulierten Fragenkatalog gezielt nachhakte. Während des Interviews erhielten die Kinder je nach Aufgabe vorgefertigte Bögen mit Aufgabenstellungen bzw. Anschauungsmitteln und leere Arbeitsblätter, die für Lösungsansätze, Zeichnungen und Notizen genutzt werden konnten. Die Bögen boten den Kindern ausreichend Platz für die Aufzeichnung von Notizen, Zwischenergebnissen, Rechnungen oder Zeichnungen. Zudem bestand die Möglichkeit, Markierungen und Zeichnungen in die Abbildungen einzufügen. Zu diesem Zweck erhielten die Probanden Stifte unterschiedlicher Farben. Während des Interviews wurden die Kinder dazu aufgefordert, ihre eigenen Strategien und Lösungen – auch mittels des Anschauungsmaterials – zu erklären und zu begründen.

2.3 Konzeption und Einsatz der Aufgaben

Dieses Kapitel behandelt die Konzeption und den Einsatz der Aufgaben aus unterschiedlichen Stadien der Untersuchung, die hinsichtlich ihres Einsatzes in chronologischer Reihenfolge vorgestellt werden.

Da die Studie insgesamt aus drei aufeinander aufbauenden Teilen mit unterschiedlichen Forschungsteilzielen besteht, werden dementsprechend die darin verwendeten Aufgaben in drei Unterkapiteln präsentiert. In den folgenden Ausführungen werden alle Interviewaufgaben im einzelnen vorgestellt und deren Zusammenstellung im Hinblick auf die Forschungsinteressen begründet. Die Aufgaben sind so gestaltet, dass sie verschiedene Lösungswege zulassen. Auf die Schülerlösungen und deren Analyse wird in Kapiteln 3 und 4 näher eingegangen werden. Die Vorstellung der Arbeitsblätter für den Unterricht erfolgt aufgrund ihrer Ähnlichkeit untereinander exemplarisch.

2.3.1 Aufgaben der Untersuchungsphase I

In den beiden beteiligten Ländern Deutschland und Russland beginnt der Mathematikunterricht in der Klasse 5 traditionell mit dem Thema „Natürliche Zahlen“. Dabei stehen Rechengesetze und die Wiederholung von in der Grundschule erlernten Rechenoperationen im Vordergrund. Ferner befassen sich die Fünftklässler mit der Darstellung der natürlichen Zahlen am Zahlenstrahl. Im Interesse der Forschungsfragen begab sich die Autorin daher auf die Suche nach Aufgaben, die sich einerseits dem Einstiegsthema „Natürliche Zahlen“ zuordnen ließen, andererseits eine neue Perspektive auf das Thema ermöglichten und gleichzeitig für Partnerarbeit geeignet waren. Dies sollten keine üblichen Rechenaufgaben sein, sondern Aufgaben zur Erkennung von Mustern bzw. Zahlenbeziehungen. Außerdem erschien es altersgemäß, die Problemstellungen in anschaulich-vermittelten Kontexten (z. B. geometrische Musterfolgen) zu präsentieren. „While syntax and meaning in poetry are deeply dependent on rhythm and phonetic match, syntax and meaning in algebra are deeply dependent on visualization“ (Radford & Puig, 2007, 160). Insgesamt bestand die Idee darin, Kinder die allgemeine Struktur schrittweise zu explorieren und beschreiben zu lassen.

Die erste Untersuchungsphase diente dem Zweck, den aktuellen Entwicklungsstand der Kinder bezüglich ihrer Strukturierungs- und Generalisierungsfähigkeiten sowie ihres Argumentationsvermögens festzustellen. Die Planung und der Aufbau der Untersuchungsphase I sind von folgenden Forschungsfragen geprägt:

- Welche Strategien zur Problembewältigung verwenden die Schüler?
- Welche mentalen Strukturen und welches Argumentationsvermögen der Schüler der Jahrgangstufe 5 sind bei der Generalisierung vorhanden?

Nachfolgend werden drei im Interview I verwendete Aufgaben einzeln vorgestellt und anschließend einander gegenübergestellt.

Aufgabe MAMA

Schon Kleinkinder begegnen natürlichen Zahlen und lernen zu zählen. In der Grundschule lernen die Kinder sodann, arithmetisch mit natürlichen Zahlen zu operieren, indem sie sich – auch in Sachkontexten – mit vielen Rechenaufgaben beschäftigen.

„Das Zahlensystem nach seinen inneren Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen zu befragen“ (Hefendehl-Hebeker, 2001a, 88) stellt eine hochinteressante Aufgabe dar. Um in einem für die getesteten Fünftklässler vertrauten Bereich zu bleiben, konzipierte die Autorin (in Anlehnung an Bauersfeld, 2007) die Aufgabe „MAMA“ als Einstieg in die Interviewreihe. Jedes Kind erhielt ein Blatt Papier mit zwei untereinander angeordneten Zahlen- und Buchstabenfolgen. Untersucht werden sollte der Zusammenhang zwischen einer Buchstabenfolge und der Folge der natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \end{array}$$

Die gestellten Fragen lassen sich in drei Fragengruppen aufteilen:

- Fragen, die direkt durch die visuelle Wahrnehmung der abgebildeten Folgenglieder beantwortet werden können;
- Fragen zur Strukturierung der Beziehung beider Folgen;
- Fragen zu den nicht abgebildeten Folgengliedern, die sowohl durch eine Fortsetzung beider Folgen als auch durch strukturelle Überlegungen beantwortet werden können.

Die Fragen – die letzte ausgenommen – führten in einer bestimmten Progression schrittweise vom Konkreten zum Abstrakten. Dadurch war es möglich, den angestrebten Entwicklungsstand in Bezug auf die gestellte Forschungsperspektive genau auszuloten.

Die Kinder erhielten Kärtchen mit Fragen in folgender Reihenfolge:

◇ Welcher Buchstabe steht über 7?
◇ Welcher Buchstabe steht über 4?
◇ Über welchen Zahlen steht ein A?
◇ Um welche Zahlen handelt es sich generell, über denen ein A steht?
◇ Über welchen Zahlen steht ein M?
◇ Um welche Zahlen handelt es sich generell, über denen ein M steht?
◇ Kann über 2006 ein M stehen?
◇ Welcher Buchstabe steht über 17?
◇ Welcher Buchstabe steht über 56?
◇ Welche Zahl steht unter dem dritten A?
◇ Welche Zahl steht unter dem fünften A?
◇ Welche Zahl steht unter dem achten A?
◇ Welche Zahl steht unter dem dritten M?
◇ Welche Zahl steht unter dem elften M?
◇ Welcher Buchstabe steht über 33?

Die Kärtchen lagen in einem Stapel mit dem Rücken nach oben auf dem Tisch, sodass sie von den Kindern umgedreht werden mussten, um die jeweilige Frage lesen zu können. Dabei stand auf jeden Kärtchen jeweils eine Fragestellung. Die Fragen waren aus folgenden Überlegungen nicht gesammelt auf einem Interviewbogen aufgeführt, sondern auf einzelne Kärtchen verteilt: Erstens sollten beide Probanden die jeweilige Frage zeitgleich lesen und zu bearbeiten beginnen; damit sollte dem Umstand vorgebeugt werden, dass eines der Kinder das andere im Lesen und Bearbeiten überholt. Zweitens wurde mit den Kärtchen eine Bearbeitung der Fragen ohne Sprünge streng in der Reihenfolge des Fragenkatalogs sichergestellt. Schließlich erinnert dieses Aufgabenformat eher an ein Spiel als an die übliche Form von im Mathematikunterricht eingesetzten Aufgaben. Die Situation im Interview unterschied sich aus Sicht der Schüler schon zu dessen Beginn auf natürliche Weise von der Lernsituaton bzw. der Leistungsüberprüfung im Mathematikunterricht.

Aufgabe DREIECKE

Die nächste Aufgabe trägt die Bezeichung DREIECKE [2] und wurde den Schülern in der klassischen Form einer in vier Teilaufgaben unterteilten Schulbuchaufgabe gestellt.

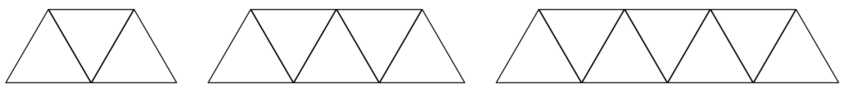


Abbildung 2.3: Figurenfolge Dreiecke

Die Frage „Erkennst du die Regel?“ bildete die Überschrift des Interviewbogens. Gegeben waren drei Figuren, welche einer Regelmäßigkeit folgten (Abb. 2.3). Aufgabe der Schüler war es, die Figurenfolge zu betrachten und folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

(a) Betrachte die Musterfolge und ergänze sie um zwei weitere Muster.
(b) Welche Zahlenfolge gehört dazu? Schreibe die ersten fünf Zahlen auf.
(c) Schreibe dann die 8. Zahl der Folge, ohne das Muster zu zeichnen.
(d) Wie lautet die 50. Zahl der Folge?

Die Auswahl dieser Aufgabe für das Interview I, in der Lernende nach einer Regel bzw. Gesetzmäßigkeit im Bauprinzip von Figurenfolgen gefragt wurden, also

[2] Es handelt sich un eine modifizierte Version der Aufgabe aus dem Schulbuch Mathematik 5, Neue Wege (Lergenmüller u. a. 2005, 118)

aufgefordert waren zu generalisieren, basierte auf folgender Überlegung: „The point about using picture sequences for counting objects is that there is a background structure, coming from pictures, which is what formula is expressing“ (Mason, 2005, 117).

Jedes Kind des Probandenpaares erhielt ein eigenes Aufgabenblatt, und es wurde ihnen überlassen, die Aufgabe gemeinsam oder individuell zu bearbeiten.

Aufgabe ZAHLENSTRAHL

Im regulären Mathematikunterricht lernen die Fünftklässler, dass natürliche Zahlen sich gut an einem Zahlenstrahl veranschaulichen lassen. Geplant war, die Kinder in einem Gespräch zu den Zahlenbeziehungen am Zahlenstrahl zu befragen. Als Anschauungsmittel sind hierbei ein unbeschrifteter Zahlenstrahl, eine Spielfigur und kleine Kärtchen mit Zahlen von 0 bis 15 sowie den Termen n, $n+1$, $n-1$, $n+2$, $n-2$ verwendet worden. Die Kärtchen mit den algebraischen Termen stellten dabei völlig neue Objekte für die Kinder dar. Die fehlende Beschriftung bei der Skalierung des Zahlenstrahls ermöglicht die Zuordnung der Striche zu unterschiedlichen Zahlenwerten. Eine Spielfigur auf dem Zahlenstrahl symbolisiert eine Zahl.

Die Aufgabe wurde mit dem Ziel verwendet, die Vorstellungen der Kinder zu den Begriffen Vorgänger/Nachfolger einer Zahl sowie deren Darstellung am Zahlenstrahl aufzugreifen. Die dabei gestellten Fragen lassen sich in folgende Gruppen aufteilen:

- Fragen zu konkreten Zahlenbeispielen;
- Fragen zur Beschreibung der allgemeinen Regel zur Bestimmung des Vorgängers/Nachfolgers einer Zahl;
- Fragen zur Formalisierung der erkannten Regel.

Das Interviewgespräch verlief stets in vorher – von der Interviewerin auch in ihrer Reihenfolge – festgelegten Schritten, sodass sich alle Probanden denselben Fragen und Aufgaben ausgesetzt sahen. Die für die Bearbeitung der einzelnen Fragen in Anspruch genommene Zeit konnte dagegen von einem Probandenpaar zum anderen variieren.

Im ersten Schritt wurden die Kinder aufgefordert, eine beliebige Zahl zwischen 1 und 14 auszuwählen, sowie die vorherige und nachfolgende Zahl zu benennen. Dabei sollten sie die Kärtchen auf den Zahlenstrahl legen. An einige Beispiele schloss sich die Frage an, wie man den Vorgänger und Nachfolger (Nachbarn auf dem Zahlenstrahl) einer bestimmten Zahl ermitteln kann.

Im zweiten Schritt wurden die Probanden gebeten, eine allgemeine Regel für diese Bestimmung schriftlich festzuhalten. Sie sollten sich dabei vorstellen, einen für andere Kinder verständlichen Beitrag für ein Lehrbuch der Mathematik, sozusagen „von Kindern für Kinder gemacht“, zu verfassen.

Im dritten Schritt erhielten die Kinder ein Kärtchen mit dem Term n, welches über der Spielfigur auf dem Zahlenstrahl platziert wurde. Die Interviewerin schlug den Kindern vor, diesen Buchstaben n als Repräsentanten für eine beliebige Zahl zu betrachten und fragte sogleich, wie man deren Nachbarn bestimmen würde.

Im vierten Schritt legte die Interviewerin den Kindern Kärtchen mit den Termen $n+1$, $n-1$, $n+2$, $n-2$ mit der Frage vor, ob sie damit etwas anzufangen wüssten. Nachdem dieser letzte Schritt mit den Kindern ausdiskutiert worden war, wurde das Interview beendet.

Gegenüberstellung der Aufgaben der Untersuchungsphase I

Die Aufgaben verfolgen ein gemeinsames Ziel, unterscheiden sich aber nach Inhalt und Art der Präsentation.

Die Aufgabe MAMA ist als Spiel mit Kärtchen konzipiert und thematisiert die Beziehung einer Buchstaben- zur Zahlenfolge.

Die Aufgabe DREIECKE liefert nur eine Figurenfolge und dazu vier Arbeitsanleitungen auf einem Aufgabenblatt. Die dazugehörige Zahlenfolge ist durch die Kinder selbständig zu ermitteln. Das Aufgabenformat der DREIECKE weist somit einen deutlichen Unterschied zu dem der MAMA-Aufgabe auf.

Die Aufgabe DREIECKE beinhaltet eine direkte Verbindung von der Geometrie zur Arithmetik. „Die Fortsetzung der geometrischen Struktur liefert die Bauregel und daraus ergibt sich zwingend die zugeordnete Zahlenfolge“ (Bauersfeld, 2007, 45).

In Abgrenzung zu den ersten beiden Aufgaben des Interview I war die Aufgabe ZAHLENSTRAHL in Form eines Gesprächs ohne schriftlich vorformulierte Fragen geplant. Die Lehrbücher der Mathematik sowohl in Deutschland als auch in Russland gehen bei der Einführung des Zahlenstrahls sehr schnell zum Aspekt der Skalierung und des Maßstabes über. Im Gegensatz hierzu liegt der Schwerpunkt der Aufgabe ZAHLENSTRAHL auf der Veranschaulichung benachbarter natürlicher Zahlen an einem unbeschrifteten Zahlenstrahl.

Die Interviewaufgaben wurden den Probanden in der Reihenfolge MAMA, DREIECKE und ZAHLENSTRAHL[3] gestellt. Die anschließende Analyse der erhobenen Daten diente unter anderem der Konzeption der Aufgaben für die daraufkommenden Unterrichtsaktivitäten und die der Untersuchungsphase II.

2.3.2 Aufgaben für Unterrichtsaktivitäten

In der dreimonatigen Phase der Unterrichtsaktivitäten wurden von den Lehrkräften im Mathematikunterricht der Projektklassen Variablen eingeführt, indem die Schüler vermittelt bekamen, dass Buchstaben als Repräsentanten von Zahlen genutzt werden können. Im regulären Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 5 lernen die Schüler, natürliche Zahlen zu vergleichen, zu ordnen und an einem Zahlenstrahl zu veranschaulichen. Außerdem erlernen sie, dass sich natürliche Zahlen in gerade Zahlen und ungerade Zahlen einteilen lassen. Als Einführungsbeispiel wurde die allgemeine Darstellung einer geraden bzw. einer ungeraden Zahl in Form des Terms $2 \cdot n$ bzw. $2 \cdot n + 1$ herangezogen. Während dieser Phase bearbeiteten die Schüler sechs Arbeitsblätter[4], welche anschließend im Unterricht besprochen wurden. Die Aufgaben vermittelten einen Einblick, ihre Behandlung war aber nicht mit einem intensiven Training verbunden.

In den ersten fünf Aufgaben der Reihe waren eine Figurenfolge und eine Tabelle abgebildet. Dazu war in der Figurenfolge ein Muster zu erkennen, die Anzahl von Elementen in den Figuren zu bestimmen und in die Tabelle einzutragen. Neben der Mustererkennung sollten die Kinder auch die Aufbaustruktur der Figuren erfassen und mit Hilfe von symbolischen Darstellungen in einem algebraischen Term verallgemeinern.

Alle beteiligten Lehrkräfte erhielten ein von der Autorin detailliert aufbereitetes Konzept zur Durchführung der ersten Unterrichtsstunde mit der Aufgabe RINGE (Abb. 2.4). Die anderen Arbeitsblätter sollten nach diesem Muster bearbeitet werden.

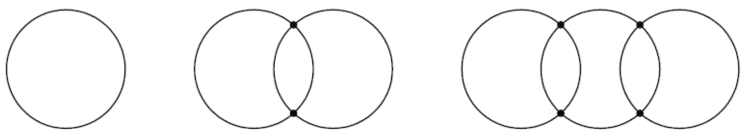
[3] An dieser Stelle sei angemerkt, dass die hier verwendeten Bezeichnungen der Aufgaben nur der Übersichtlichkeit in den Analysen der erhobenen Daten dienen. Den Schülern waren diese „Labels“ nicht bekannt, um sie nicht zu beeinflussen und verschiedene mögliche Strukturierungen bzw. Sichtweisen offen zu lassen.

[4] Alle sechs Arbeitsblätter sind im Anhang abgebildet.

Aufgabe RINGE

Die Aufgabe RINGE ist Gegenstand des ersten Arbeitsblattes der Reihe, in der die Schüler Erfahrungen im Erklären von Zusammenhängen in visuellen Folgen und einfachen Zahlenfolgen sammeln. Den Lehrkräften wurde dabei folgender Ablauf einer Unterrichtsstunde vorgeschlagen:

Aufgabe 1



- Setzte die Figurenfolge um zwei fort.
- Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte der Ringe und trage diese in die Tabelle ein.
- Finde eine Gesetzmäßigkeit und beschreibe sie mit eigenen Worten.

Figurennummer	Anzahl der Schnittpunkte
1	
2	
3	
4	
5	

Abbildung 2.4: Aufgabe RINGE

1. Zu Beginn der Unterrichtsstunde wird den Schülern die zuvor an der Tafel oder am Overheadprojektor vorbereitete Folge von sich überschneidenden Ringen gezeigt. Es soll eine Abhängigkeit der Anzahl der Schnittpunkte von der Figurennummer (von der Anzahl der Ringe) ermittelt werden.
2. Die Aufgabenzettel werden verteilt, die Aufgabenstellung durchgelesen und eventuelle Fragen geklärt. Die Schüler werden gebeten, ca. 15 Minuten lang selbständig zu arbeiten. Dabei dürfen sie den freien Platz auf dem Zettel für ihre Berechnungen, Ideen und Formulierungen nutzen. Eine Zusammenarbeit mit dem Nachbarn ist erlaubt.
3. Der Lehrer bittet einzelne Schüler, ihre Ideen vorzustellen oder die Beschreibungen der erkannten Gesetzmäßigkeiten vorzulesen und notiert diese stichwortartig auf der Tafel.

4. Der Lehrer führt vor, wie die in Worten beschriebenen Gesetzmäßigkeiten formalisiert werden können: er notiert Terme unter Verwendung der Variable n, welche die Figurennummer darstellt. Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe sind unterschiedliche Lösungen denkbar, die auf verschiedene Betrachtungsweisen der Problemstellung zurückzuführen sind, z. B.:

   1. Möglichkeit: Das Hinzufügen eines weiteren Ringes führt zur Entstehung von zwei weiteren Schnittpunkten (Abb. 2.4). Da die Schnittpunkte erst in der zweiten Figur auftreten, erhält man die Anzahl der Schnittpunkte, indem man die Anzahl der Ringe mit 2 multipliziert und die Zahl 2 subtrahiert. Diese Abhängigkeit kann wie folgt ausgedrückt werden: $2 \cdot n - 2$.

   2. Möglichkeit: Die Schnittpunkte der Ringe bilden zwei horizontale Linien – die obere und die untere – von Punkten. Die Anzahl der Punkte auf jeder einzelnen Linie ist um 1 geringer als die Anzahl der Ringe. Deswegen wird von der Anzahl der Ringe die Zahl 1 subtrahiert und das Ergebnis verdoppelt: $(n - 1) \cdot 2$.

5. Abschließend wird der Aspekt der Gleichheit der algebraischen Terme diskutiert. Zwar verursachen die unterschiedlichen Vorgehensweisen die unterschiedlich aussehenden Ausdrücke, jedoch kann sowohl durch konkrete Zahlenbeispiele als auch auf formaler Ebene die Gleichwertigkeit der gefundenen Terme aufgezeigt werden.

Die Abbildung 2.5 zeigt die zweite Aufgabe der Reihe. Die weiteren Aufgaben 3, 4 und 5 (s. Anhang) folgen demselben Schema.

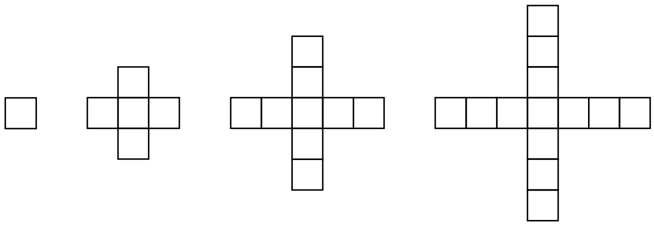
Die Aufgabenstellung des sechsten Arbeitsblattes drehte die Fragerichtung um: zu einer abgebildeten Figurenfolge waren zwei Terme angegeben, die in Bezug auf ihre Passung zu der Figurenfolge beurteilt werden sollten (Abb. 2.6).

2.3.3 Aufgaben der Untersuchungsphase II

Die Analyse des Datenmaterials der Untersuchungsphase I führte zur Konzeption der Aufgaben der Untersuchungsphase II mit dem Ziel, die *Zone der nächsten Entwicklung* von Kindern in Bezug auf den Gebrauch von Variablen aufzuspüren.

Dafür war es erforderlich, das erworbene Wissen bzw. erworbenen Kenntnisse nicht nur nachahmend auf eine ähnliche Situation zu übertragen. Vielmehr lag das Forschungsinteresse in der Bemessung des Transfer-Effekts in verschiedenen An-

Aufgabe 2



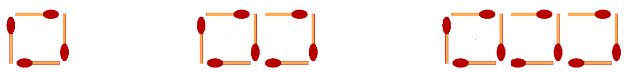
- Betrachte die Figurenfolge.
- Fülle die Tabelle für die ersten sechs Figuren aus.
- Finde und beschreibe die Gesetzmäßigkeit mit deinen eigenen Worten.
- Suche einen Term für die Anzahl der Kästchen in der *n*-ten Figur.
- Bestimme die Anzahl der Kästchen in der 10. und 101. Figur.

Nr. der Figur	1	2	3	4	5	6	…	n	…	10	…	101
Anzahl der Kästchen												

Abbildung 2.5: Aufgabe KREUZE

Aufgabe 6

Anzahl Kettenglieder:	1	2	3



Anzahl Zündhölzer:	4	7	10

Wenn du mit Zündhölzern Ketten legst, entdeckst du Gesetzmäßigkeiten. Zwischen der Anzahl der Kettenglieder und der Anzahl benötigter Zündhölzer besteht eine Beziehung. Für eine beliebig lange Kette kann diese Beziehung als Term geschrieben werden.

Zu dieser Kette wurden zwei Terme gefunden:
Anja schrieb $3 \cdot n + 1$ und Peter schrieb $4 + 3 \cdot (n - 1)$.

Wie haben Anja und Peter gerechnet? Wer hat Recht?

Abbildung 2.6: Aufgabe ZÜNDHOLZKETTE

forderungssituationen. Dazu wurden zwei gestaffelte Fragestellungen verfolgt: Wie gehen Kinder mit den Aufgaben um, die zu den in den Zwischenphase präsentierten Aufgaben ähnlich sind? Welche Transferfähigkeiten zeigen die Kinder? Dabei wurde in Anlehnung an Stern (1998) zwischen *Nah-* und *Ferntransfer* unterschieden.

Nahtranfer liegt vor, wenn eine Situation, in der das Wissen erworben wurde, sich nur in Oberflächenmerkmalen von einer strukturhomogenen Situation unterscheidet, auf die das Wissen übertragen wird. Hier kennzeichnet sich der Transfer-Effekt dadurch, dass Kenntnisse übertragen werden, ohne dass diese modifiziert werden wüssen. Beim *Fern-Transfer* hingegen muss Wissen modifiziert werden, damit es auf eine neue Situation übertragen werden kann. Das letzte setzt Verstehen voraus (vgl. Stern, 1998, 45). Entsprechend ergeben sich verschiedene Aufgabentypen.

Für das Aufgabenset der Untersuchungsphase II waren mit Berücksichtigung dieser Vorüberlegungen drei Aufgaben ausgesucht bzw. entwickelt worden, die nachfolgend ausführlich dargestellt werden.

In der letzten Phase, dem Interview II, wurden dieselben Probanden – nun allerdings einzeln – interviewt. Die darin erhobenen Daten sollen auf folgende Forschungsfragen Antwort geben:

- Wie können und wollen Schüler verschiedene Repräsentationsformen – Bilder, Tabellen, Anschauungsmittel oder Symbole – bei der Beschreibung von Gesetzmäßigkeiten bzw. Zahlenbeziehungen anwenden?
- Welche Argumentationstechnik verwenden sie?
- Wie wird die formale Sprache benutzt?
- Lassen sich hinsichtlich der Herangehensweisen, Argumentationsgänge sowie der Verwendung und Deutung von Variablen Invarianten bzw. Typologien – auch über beide Kulturen hinweg – ausmachen?

Aufgabe KREISE

Gesucht wurden Aufgaben, die ein Potenzial für Entdeckungen und zugehörige Erklärungen enthalten. Eines der bekannteren Themen hierzu bildet – ähnlich der Aufgabe DREIECKE der Untersuchungsphase I – das Muster in geometrischen Formen.

Im naturwissenschaftlichen Denken manifestieren sich Grunddispositionen, die darauf zielen, Gesetzmäßigkeiten durch visuelle Muster zu erfassen. So z. B. die Molekülmodelle der Chemie. Die Lektüre von Dawydow (1996, 270) gab den Impuls dafür, die geometrischen Muster in Strukturdarstellungen von chemischen Stoffen zu suchen. Dawydov berichtet, dass zahlreiche Forschungen zu Denkprozessen bei der Lösung von Aufgaben – seien sie praktischer oder wissenschaftlicher Art – gezeigt haben, dass die Idee eines Lösungsweges nicht selten entsteht, wenn der

Mensch mit einer anderen Situation befasst ist. Bei dem Versuch, eine Aufgabe zu lösen, bildet sich beim Menschen eine Art Vorahnung heraus, was die Antwort sein soll; er weiß nur noch nicht genau, wie sie lautet. Nun kann aber sogar der kleinste Anstoß von außen den Menschen sofort zur Lösung bringen. Es ist, als erkenne der Mensch in dem Tipp, was für die Lösung erforderlich ist. Zuweilen kommen solche Anstöße von Gegenständen oder Situationen, die wenig mit der Aufgabe zu tun haben. Auf diese Art und Weise wurde etwa eine Entdeckung von Friedrich August Kekulé gemacht, einem deutschen Chemiker des 19. Jahrhunderts. Kekulé grübelte lange darüber, wie er das Molekül des Benzols in Form einer strukturellen Formel darstellen soll, die den Eigenschaften des Benzols Rechnung trägt (Benzol hat 6 Atome Kohlenstoff und 6 Atome Wasserstoff C_6H_6). Das Prinzip der Bestimmung einer solchen Formel leuchtete Kekulé unerwartet ein. Einmal betrachtete er im Zoo einen Käfig mit Affen, die Fangen spielten. Die Affen hatten bei ihrem Spiel einmal einen Ring gebildet, indem jeder Affe sich mit einem Fuß am Käfig und mit beiden Händen am anderen Fuß des benachbarten Affen festhielt. Eine derart komplizierte Anordnung der Hände und Füße stieß den Wissenschaftler auf den Gedanken, dass dies die Darstellung der Benzolformel ist. Und tatsächlich kann sein Molekül in Form eines Rings mit doppelten Beziehungen der Kohlenstoffatome dargestellt werden. Auf diesem Wege ist in der Chemie eine neue strukturelle Formel entstanden (Abb. 2.7). Nur ein Verstand, der in der Erzeugung komplizierter Abstraktionen geübt ist, hat in dem „lebenden Ring“ das abstrakte Prinzip des Molekülaufbaus erkennen können.

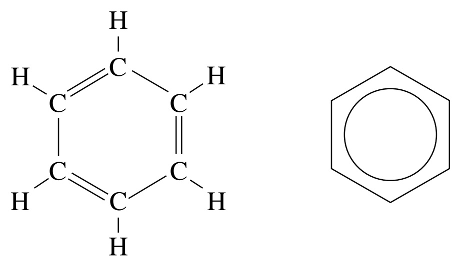
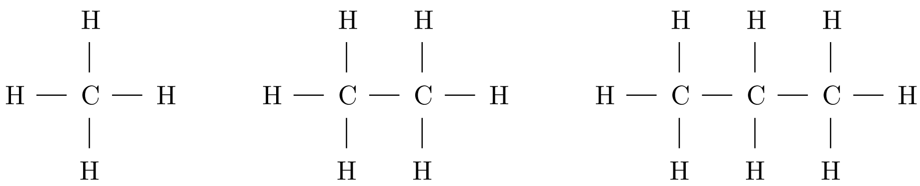


Abbildung 2.7: Benzol-Strukturformel nach Kekulé

Während der Recherche über Kekulé und die chemischen Formeln stieß die Autorin im Buch von Serra (2003, 117) auf eine Aufgabe zur Strukturformel von Alkanen. Eine große Zahl organischer Verbindungen enthält neben Kohlenstoff nur noch das Element Wasserstoff; diese Gruppe von Verbindungen nennt man da-



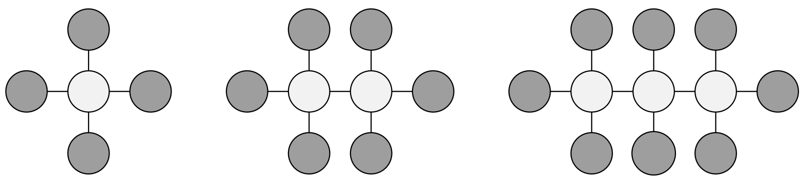
Methan CH_4 Ethan C_2H_6 Propan C_3H_8

Abbildung 2.8: Kohlenwasserstoffe

her auch Kohlenwasserstoffe. Die einfachste Klasse der Kohlenwasserstoffe sind die Alkane. Die Bezeichnung Alkane entspricht der modernen, systematischen Bezeichnungsweise für organische Verbindungen. Darunter fallen etwa Methan - Kohlenwasserstoffe, da von der einfachsten Verbindung der Alkane, dem Methan, alle weiteren Verbindungen dieser Reihe nach der Formel $C_nH_{2\cdot n+2}$ abgeleitet werden können (Abb. 2.8).

Aus der Chemie hat die Autorin die Anregung für die Aufgabe KREISE (Abb. 2.9) entnommen, um aus der Darstellung chemischer Formeln geometrische Muster abzuleiten, wobei in den Darstellungen der Figurenfolgen die chemischen Elemente durch Kreise verschiedener Farbgebung ersetzt wurden.

Somit wurde ein Beispiel gewählt, das in doppelter Hinsicht beziehungsreich (Freudenthal, 1977) ist. Auf der sachlichen Ebene hat diese Aufgabe disziplinübergreifende Bedeutung, denn sie ist nicht nur ein schönes, aber frei erfundenes Muster, vielmehr stellt sie ein Strukturmodell aus der Chemie dar. Auf der erkenntnistheoretischen Ebene bietet diese Aufgabe ein Wechselspiel zwischen Darstellung und



Figurennummer	1	2	3	4	⋯	n	⋯	7	⋯	50
Anzahl der gelben Kreise										
Anzahl der blauen Kreise										
Anzahl der Kreise insgesamt										

Abbildung 2.9: Aufgabe KREISE

Erkenntnis, was in beiden Bereichen eine große Rolle spielt. Es besteht die Hoffnung, dass die Lernumgebung kreative Spielräume eröffnet und dass dadurch dieses Wechselspiel in den Interviews bei den Probanden angeregt wird.

Auf dem Bogen sind eine Musterfolge von drei Figuren sowie eine auszufüllende Tabelle abgebildet. Neben den drei bereits abgebildeten Figuren ist genügend Platz für eine eventuelle bildliche Fortsetzung der Figurenfolge freigelassen worden. Aufgabe der Kinder ist es, zunächst die Anzahl der gelben, dann die der blauen und abschließend die der Kreise insgesamt zu bestimmen. Die Tabelle enthält Spalten für die Figurennummern 1 bis 4, n, 7 sowie 50. Die „Spalte n“ für die allgemeine Darstellung ist absichtlich in der Tabellenmitte platziert. Ziel war es zu beobachten, ob die Kinder bereits nach dem vierten Muster die Gesetzmäßigkeit erkennen, formal beschreiben können und für die nachfolgenden Spalten der Figuren 7 und 50 anwenden würden. Dabei sind den Probanden jedoch keine Anweisungen gegeben worden, in welcher Reihenfolge die Spalten der Tabelle auszufüllen waren.

Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

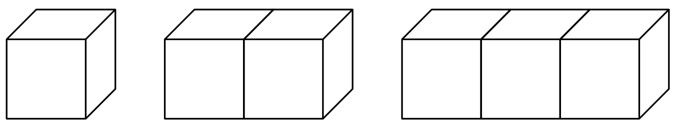


Abbildung 2.10: Würfelschlangen verschiedener Längen

Der Wahl der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE für das Interview II lagen folgende Überlegungen zugrunde: In Anlehnung an Aebli (1994, 329) wollte die Autorin es den Probanden mit dieser Aufgabe ermöglichen, Tätigkeiten an Gegenständen auszuführen – nämlich das Konstruieren mit Spielmaterial (Klötze aufschichten) – und ihr eigenes Tun zu beschreiben. Somit wurden das Handeln und das Sprechen verbunden. Im schweizer Mathematikbuch Mathbu.ch 7 werden einige Aufgaben zu Würfelkonstruktionen – darunter Würfeltürme, Würfelschlangen und Würfelmauern – angeboten. Als geeignet zur Verfolgung der Forschungsziele erschien die Aufgabe Würfelschlange, da das Hantieren mit auf dem Tisch liegenden Bauklötzen haptisch einfacher fällt. Während der Argumentation und der Erläuterung eigenen Tuns ist das Hin- und Herschieben der Klötze leichter als bei aufgetürmtem Spielmaterial.

Eröffnet wird die Aufgabe damit, dass Holzwürfel gleicher Größe auf den Tisch gelegt werden. Zuerst soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem einzelnen Würfel bestimmt werden. Da eine Seite des auf dem Tisch liegenden Würfels verdeckt ist, sind von den sechs quadratischen Seiten nur noch fünf sichtbar. Ferner werden Würfelschlangen gebildet, indem man einen bereits auf dem Tisch liegenden Würfel nach und nach durch Heranschieben weiterer Würfel zu einer Würfelschlange ansteigender Länge ergänzt. Mit jedem Würfel soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate notiert und der Anzahl von Würfeln in der Schlange gegenübergestellt werden. Dabei zeigen sich Gesetzmäßigkeiten, welche eine allgemeine Darstellung motivieren.

Die Holzwürfel sind gegenständlich präsent, was konkrete Handlungen initiieren soll, d. h. die Kinder sollen die Würfelschlangen eigenhändig bauen und die sichtbaren Quadrate zählen. Für die Notizen steht ein leeres Blatt Papier zur Verfügung, auf dem die Kinder selbständig eine Darstellung ihrer Ergebnisse entwerfen sollen. Nach dem 5. Würfel werden die Probanden gebeten, ihre Zählstrategie in Form eines Terms mit Hilfe der Variable n für eine beliebige Anzahl von Würfeln formal zu beschreiben. Anschließend wird nach der Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einer Würfelschlange der Länge zehn gefragt. Dabei gilt es zu beobachten, ob für die Beantwortung dieser Frage die ggfs. angefertigte algebraische Darstellung des entdeckten Musters zur Anwendung kommt.

Aufgabe ZAHLENSUMME

Die Konzeption der Aufgabe ZAHLENSUMME hatte folgenden Hintergrund: Zum einen wollte die Autorin in diesem letzten Interview eine Aufgabe mit einem komplett neuen Kontext – einem arithmetischen Zusammenhang, der verbal vermittelt wird – stellen, um herauszufinden, ob die Kinder bei ihrer Argumentation formale Sprachmittel verwenden würden. Dies entstand aus der Intention, den in der Literatur diskutierten Aspekt der Kontextabhängigkeit mathematischen Wissens, also die Problematik des Gegensatzes von „*Situiertheit* zu *Allgemeingültigkeit* des mathematischen Wissens“ (vgl. Steinbring, 2000b, 74) anzugehen und die Deutung und das Benutzen von Zeichen und Symbolen in einem neuen Referenzkontext zu untersuchen. Zum anderen sollte der Prozess der Mustererkennung in einem neuen Aufgabenformat – einer Aussage ohne jegliche Arbeitsanweisungen – beobachtet werden. Lee (1996, 90) berichtet über die Ergebnisse der mit Wheeler durchgeführten Studien mit High-School-Schülern, die sich mit der Aufgabe zu befassen hatten, mit Hilfe von Algebra zu zeigen, dass die Summe zweier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets ungerade ist. Ausführlich werden darin die damit verbundenen Schwierigkeiten der Schüler beschrieben und die Behauptung aufgestellt, dass diese Aufgabe auch Schülern ohne Algebra-Vorwissen gestellt werden kann: „the generalisation that is required here is at the level of what might be called „number facts.“ Pre-algebra students would probably be as aware of these generalisations as the students interviewed here“ (Lee, 1996, 90f.).

Es schien interessant, Kindern eine ähnliche Aufgabe zu stellen, die einerseits wesentlich jünger sind und die andererseits ganz am Anfang des Algebralernens stehen und somit in der Verwendung von Algebra noch nicht routiniert sind. Es galt dabei zu untersuchen, mit welchen Mitteln bzw. Darstellungen die Generalisierung ausgedrückt wird und ob und wie die formale Sprache zur Anwendung kommt.

Die Kinder erhielten ein Blatt mit einer schriftlich formulierten Aussage: *„Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.“* Die Kinder wurden aufgefordert, diesen Satz laut vorzulesen. Von Seiten der Inteviewerin wurde weder die Aufgabenstellung benannt, noch folgte ein Hinweis zur weiteren Bearbeitung. Es galt zunächst zu beobachten, welche Rahmungen die Kinder zur Auseinandersetzung mit dieser offenen Aufgabe auswählen (Rechen-Rahmung oder Struktur-Rahmung, Bewertung der Aussage als wahr oder falsch, Bennenung passender Beispiele, Verifizierung oder Falsifizierung der eigenen Bewertung). Abhängig von der Wahl der Rahmung wurden von der Interviewerin anschließend begleitende Fragen gestellt.

Die Bewältigung der Aufgabe erfordert einen Ferntransfer. Intention dabei war es zu testen, wie weit dieser geleistet wird. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine offene Aufgabe in Textform. Die Offenheit ist dadurch gekennzeichnet, dass keine Aufforderung zur konkreten Handlung gestellt wird. Die Textform der Aufgabe birgt laut Stern (1998, 95) mehrere Probleme in sich:

- Auf der Ebene des Textverständnisses besteht Bedarf an Klärung der Begriffe, wie „natürliche Zahl“, „aufeinanderfolgend“, „Summe“;
- Auf der Ebene des Situationsverständnisses bei der Umsetzung in ein konkretes Zahlenbeispiel;
- Auf der Ebene der Mathematisierung bei dem Erstellen eines mathematischen Problemmodells: Formulierung, Formalisierung und Begründung der Hypothese zur Allgemeingültigkeit der Aussage.

Das Aufgabenformat ermöglicht verschiedene Zugänge; diese erfordern auf unterschiedliche Weise das Erkennen und Darstellen von Mustern sowie die Verwendung formaler Sprachmittel.

In einem *arithmetischen Zugang* etwa betrachtet man die Aussage, indem man sie an ausgewählten Beispielen überprüft. So stellt man fest, dass die Ergebnisse von Additionen dreier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch drei teilbar sind. Wählt man Zahlentripel systematisch aus, kann man viele Erkenntnisse gewinnen:

- die ausgerechneten Summen erhöhen sich um 3 und bilden somit eine Dreierreihe;
- beim Dividieren der Summen durch 3 erhält man als Ergebnis stets die mittlere Zahl aus dem Zahlentripel;
- die mittlere Zahl in einem Zahlentripel ist abhängig von den Zahlen, die sie umgeben und umgekehrt: ist die mittlere Zahl eine gerade Zahl, so sind die beiden „Nachbarn" – also Vorgänger und Nachfolger – ungerade Zahlen; ist sie eine ungerade Zahl, so sind die beiden „Nachbarn" zwangsläufig gerade Zahlen;
- vergleicht man die nacheinander folgenden Zahlentripel untereinander, kann eine Erhöhung jedes Summanden um 1 beobachtet werden;
- Divisionsergebnisse beim systematisch lückenlos gewählten Zahlentripel ergeben die Reihe der natürlichen Zahlen.

Des Weiteren gibt es einen *enaktiven Zugang* unter Verwendung von Plättchen. Mit diesen Plättchen lassen sich die Zahlen darstellen; durch Um- und Hinzulegung können die Operationen mit Zahlen veranschaulicht werden.

Schließlich ist ein *algebraischer Zugang* möglich, in dem die inhärente Strukturierung der Situation durch die formalisierte Darstellung unter Verwendung von Variablen zum Beweis führt.

Die Allgemeingültigkeit der formulierten Aussage kann auch ohne Verwendung der algebraischen Formelsprache aufgezeigt werden. Bei der Schülerbearbeitung der Frage nach der Allgemeingültigkeit werden den Kindern daher Anschauungsmittel in Form von quadratischen Plättchen, einem auf einem Blatt Papier aufgezeichneten Zahlenstrahl aus dem Interview I sowie die aus dem Interview I stammenden Kärtchen mit natürlichen Zahlen von 0 bis 15 sowie den Termen n, $n-1$, $n-2$, $n+1$ und $n+2$ zur Verfügung gestellt. Zur Veranschaulichung ihrer Argumentation konnten die Kinder diese Gegenstände bei Bedarf verwenden.

Gegenüberstellung der Aufgaben der Untersuchungsphase II

Die stark strukturierte Aufgabe KREISE bietet ein mit der Aufgabe DREIECKE der Untersuchungsphase I und den Arbeitsblättern der Unterrichtsaktivitäten identisches Format und eine bekannte Situation.

Die Aufgabe WÜRFELSCHLANGE stellt eine zu der Aufgabe KREISE sowie den zuvor im Unterricht behandelten Arbeitsblättern ähnliche Situation dar, hat jedoch ein anderes Format: es liegen weder eine Bildfolge noch eine vorgefertigte Tabelle vor. Die WÜRFELSCHLANGE ist im Gegensatz zu den KREISEN zudem dreidimensional, obwohl die Strukturierung der Gesamtanzahl der Kreise und der Anzahl der sichtbaren Quadrate in einer Würfelschlange im Grunde zu dem gleichen algebraischen Ausdruck $3 \cdot n + 2$ führt.

Die Aufgabe ZAHLENSUMME ist als offene Aufgabe formuliert und enthält sowohl ein neues Format als auch eine neue Situation. Zwar ist die ZAHLENSUMME mit dem ZAHLENSTRAHL der ersten Phase thematisch verwandt, jedoch gilt es in der ZAHLENSUMME zunächst die verborgene Struktur zu erkennen und zu erfassen, sowie anschließend mit Einbezug der formalen Darstellung die Allgemeingültigkeit der Aussage zu beweisen.

Die Aufgaben wurden den Probanden in der Reihenfolge: KREISE, ZAHLENSUMME und WÜRFELSCHLANGE gestellt. Damit sollte sichergestellt werden, dass die in der Aufgabe KREISE gewonnenen Einsichten der Kinder nicht direkt auf die WÜRFELSCHLANGE übertragen werden konnten. Ferner sollte die Reihenfolge dem Vorurteil der Kinder entgegenwirken, dass die gestellten Aufgaben immer schwieriger werden. Die deutlich anspruchsvollere Aufgabe ZAHLENSUMME wurde daher absichtlich in der Mitte des Interview II zwischen zwei strukturverwandten Aufgaben platziert.

2.4 Dokumentation und Analyse der Daten

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über die Dokumentation und Analyse der erhobenen Daten. Darin werden einige Methoden der Datenerhebung skizziert, das empirische Material ausgewählt und Methoden und Instrumente der Interviewanalyse aufgezeigt.

2.4.1 Datenerhebung

Die vorliegende Arbeit folgt dem Ansatz der interpretativen Unterrichtsforschung (Voigt, 1991; Krummheuer, 1992). Die Forschungsmethode ist ein Interview, also ein Gespräch der Forscherin mit Probanden aus der Jahrgangsstufe 5 über mathematische Aufgaben. Als Datenmaterial dienten Interviewbögen, die von den Kindern im Laufe eines Interviews ausgefüllt wurden sowie Videoaufnahmen der Interviews, die mit Hilfe eines Kameramanns/einer Kamerafrau erstellt wurden. Diese freiwilligen Helfer hatten darüber hinaus die Aufgabe, während der Aufnahmen die interessanten Gesprächsmomente mit genauer Zeitangabe in einem Protokollbogen zu vermerken. Direkt nach jedem Interview fand ein erster Austausch von Eindrücken zwischen der Interviewerin und dem Kameramann/der Kamerafrau statt. Diese Eindrücke wurden anschließend als Feldnotizen zu den Protokollbögen hinzugefügt. Hierdurch wurde die Wahrnehmung des im Gespräch nicht unmittelbar beteiligten Beobachters in die spätere Datenanalyse einbezogen.

Die Videoaufzeichnung der Gespräche ermöglichte es, neben den verbalen Äußerungen auch die nonverbalen Aktivitäten der Kinder, wie z. B. Handlungen, Gestik, Mimik usw., zu dokumentieren und in den späteren Auswertungen zu berücksichtigen. Das Festhalten der nichtsprachlichen Äußerungen wurde allerdings auf solche fokussiert, die forschungsbezogene Relevanz aufwiesen, insbesondere Zeigehandlungen, Einzeichnungen, Sprechpausen sowie das Hantieren mit konkreten Gegenständen des Aufgabenmaterials (z. B. Plättchen oder Würfel). Grundlage für die Datenanalyse waren die Transkripte, die auf Basis der Videoaufnahmen durch die Verfasserin selbst und durch drei Studierende angefertigt worden waren.

2.4.2 Auswahl und Aufbereitung des empirischen Materials

Für die Auswertung des empirisch erhobenen Materials bietet die Fachliteratur verschiedene Möglichkeiten, die für diese Studie in Betracht gezogen werden konnten. Aus der großen Vielzahl dieser Möglichkeiten wurde eine Kombination aus Fallstudien, Vergleichsstudien und Momentaufnahmen gewählt. Zur Gestaltung der eigenen Studie wurde eine Reihe methodologischer Entscheidungen getroffen, die im Folgenden beschrieben und theoretisch begründet werden.

Zunächst wurden drei Kinder ausgewählt, an deren Beispiel drei Fallstudien durchgeführt wurden, welche einen exemplarischen Einblick in die Gesamtproblematik vermitteln sollen. In einer *Fallstudie*, die der Erforschung von Individuen oder Personengruppen dient, wird versucht, explorativ und beschreibend die forschungsrelevanten Aussagen über den Untersuchungsgegenstand zu gewinnen. „Dabei ist das entscheidende Problem die Identifikation eines für die Fragestellung der Untersuchung aussagekräftigen Falls, die Klärung, was zum Fall noch dazugehört und welche methodischen Zugänge seine Rekonstruktion erfordert“ (Flick, 2008, 254). Die Fallstudie wurde deshalb als geeignete Methode für die Bearbeitung des Forschungsanliegens ausgewählt.

Ausgehend vom Prinzip des *theoretical sampling* (Lamnek, 2005; Glaser & Strauss, 2005) wurden aus allen Versuchspersonen drei Kinder ausgewählt. Aus organisatorischen Gründen fiel die Wahl zunächst auf ein Essener Gymnasium. Um relevante Unterschiede bei den zu untersuchenden Probanden aufzuweisen, ist ein Gymnasium mit Schülern beider Geschlechter in die Studie einbezogen worden. Durch die Wahl *einer* Klassengemeinschaft in diesem Gymnasium wurden etwaige äußerliche Unterschiede in der kulturellen Einbindung, der Sprache, des Mathematikunterrichts und der Bezugsperson des Mathematiklehrers minimiert. *Innerhalb* dieser Gruppe wurde hingegen durch eine breite Auffächerung der Leistungspalette die Maximierung der Unterschiede angestrebt. Daher sind aus den Schülern dieser Klassengemeinschaft drei Kinder *unterschiedlicher* Leistungsniveaus und *unterschiedlichen* Geschlechts ausgewählt worden.

Die durch die Analyse dieser drei Fälle gewonnenen Einsichten und aufgestellten Hypothesen wurden auf die übrigen Versuchspersonen übertragen und anschließend mit den anderen 21 Einzelfällen systematisch verglichen. Denn „an Einzelfällen gewonnene Kausalhypothesen lassen sich durch systematische Vergleiche mit anderen Einzelfällen erhärten oder widerlegen“ (Bortz & Döring, 2006, 384).

Als zweite Auswertungsmethode wurde die Vergleichsstudie herangezogen, welche einen Fall nicht in all seiner Komplexität betrachtet, sondern eine Vielzahl von Fällen im Hinblick auf bestimmte Ausschnitte vergleichend gegenübergestellt. Um eine zuverlässige Basis für allgemeine Aussagen und Hypothesen herstellen zu können, sind Vergleichsstudien auf binationaler Ebene besonders geeignet.

Durch wachsende Internationalisierung und Globalisierung nahm das Interesse an internationalen Bildungsvergleichen in den letzten Jahrzehnten zu, was einen weiteren Anstoß zur Durchführung der vorliegenden Untersuchung gab. Diese vergleichende Bildungsforschung entwickelte sich zu einer „wissenschaftlichen Disziplin mit eigenen methodischen Standards und Theorieansätzen“ (Knipping, 2003, 7). Im Fokus dieser Bildungsforschung stehen internationale Leistungsstudien, wie etwa PISA und TIMMS sowie qualitativ angelegte Unterrichtsvergleiche. Letztere sind notwendig, weil Unterricht, insbesondere der Mathematikunterricht „nicht universal, sondern kulturell geprägt“ ist (Knipping, 2003, 16). Im Gegensatz zu Unterrichts- und Leistungsvergleichen wurde in der durchgeführten Forschungsarbeit der Autorin ein Vergleich unterschiedlicher Aspekte von Begriffsbildungsprozessen vorgenommen.

Die Verbindung mehrerer Fallanalysen, die zunächst unabhängig voneinander durchgeführt und anschließend komparativ oder kontrastierend gegenübergestellt werden, bildet eine Stufe zwischen der Fall- und der Vergleichsstudie (vgl. Flick, 2008, 254). Die durchgeführten Interviews stellen Momentaufnahmen dar, welche den zuvor beschriebenen Fall- und Vergleichsstudien zugrunde liegen. *Momentaufnahmen* sind Zustands- und Prozessanalysen zum Zeitpunkt der Forschung. Die Forschung ist nicht vorrangig auf die Rekonstruktion von Prozessen in Retrospektive gerichtet, auch wenn Beispiele aus vor der Zustandsanalyse liegenden Zeitpunkten in die Interviews einfließen (vgl. Flick, 2008, 255).

Die hier dargestellten Methoden der Auswahl und Aufbereitung des empirischen Materials beziehen sich explizit auf die Phase II der Untersuchung, in welcher der Fokus des Forschungsinteresses liegt. Die Phase I, die zur Feststellung des aktuellen Entwicklungsstands der Probanden dient, ist auf die strukturelle Darstellung der Beobachtungen beschränkt.

2.4.3 Methoden der Interviewanalyse

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Untersuchung des umfangreichen Datenmaterials vorgenommen wurde.

Gegenstand der Analyse waren Transkripte und Videoaufnahmen von durchgeführten Interviews. Die Analyse dieses Materials geschah in mehreren Schritten unter Verwendung unterschiedlicher Analyseinstrumente. Transkripte stellen Verschriftlichungen der Videoaufnahmen dar und wurden nach den üblichen Standards in Anlehnung an Kallmeyer (1979), vgl. auch Voigt (1984) und Schwarzkopf (2000), angefertigt. Zwar wurde bei der Transkrition vor allem auf die verbalen Äußerungen von Probanden Wert gelegt, da aber auch die Handlungen wesentlicher Bestandteil sowohl des Aufgabenlösens als auch der Argumentation waren, wurden auch bedeutende nonverbale Aktivitäten mitberücksichtigt. Um das Datenmaterial aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchten zu können, wurden zur Analyse drei verschiedene Analyseinstrumente herangezogen.

Das erste Analyseinstrument baut auf dem theoretischen Ansatz interpretativer Forschung schulischer Lehr-Lern-Prozesse von Krummheuer (1992) auf. Die interpretative Unterrichtsforschung ist eine Richtung innerhalb der Unterrichtsforschung, welche durch folgende spezifische Aspekte gekennzeichnet wird:

- die Fokussierung auf alltägliche Unterrichtsprozesse;
- das rekonstruktive Vorgehen und
- die theoretische Grundannahme, dass Lernen, Lehren und Interagieren konstruktive Aktivitäten sind (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999, 15).

Ziel des Einsatzes des ersten Analyseinstruments war das Erkennen von charakteristischen Verhaltensmustern der Schüler (Strukturierung, Generalisierung, Verbalisierung, Notation) sowie das Aufdecken von Problemstellen.

Als zweites Analyseinstrument wurde zur Rekonstruktion von Argumentationsprozessen in ausgewählten Episoden die Argumentationsanalyse nach Toulmin (1996) herangezogen. Mit Hilfe des Schemas nach Toulmin wurde die Rolle eines Darstellungsmittels, insbesondere der algebraischen Formelsprache, in Deutungs- und Argumentationsprozessen untersucht.

Das dritte Analyseinstrument bildete die im Rahmen der Studie entwickelten Beschreibungsmittel zur Erfassung der erhobenen Daten in Bezug auf Argumentationen der Probanden und stellte das Kategorienmodell dar, das seine Grundlage in der Typenbildung bei Schwarzkopf (2003) findet.

Somit erfolgte die Datenanalyse in drei Schritten, unter Einbeziehung der drei Analyseinstrumente, die im Folgenden näher erläutert werden.

2.4.3.1 Die Interpretationsmaximen nach Krummheuer

Für die Transkriptanalyse wurden die Interpretationsmaximen nach Krummheuer herangezogen, die er nicht als starres Schema, sondern als Leitfaden eines Analyseverfahrens versteht (vgl. Krummheuer, 1992, 53f.). Diese Maximen sind:

- Gliederung eines Transkripts in Episoden
- die Beschreibung nach dem „gesunden Menschenverstand“

- die extensive Interpretation der Einzeläußerungen
- die turn-by-turn Analyse
- die Entwicklung einer Deutungshypothese und
- der Vergleich ähnlicher Episoden mit abschließender theoretischer Bewertung.

Kern der so erfolgten Analyse bildete die umfangreiche Interpretation der einzelnen Handlungen und Äußerungen der Probanden sowie die anschließende turn-by-turn Analyse. Aufgrund der in Handlungen und Äußerungen prinzipiell auftretenden Mehrdeutigkeit war es wichtig, eine Vielzahl alternativer Interpretationen zu generieren. Hilfreich war dabei, dass sich mehrere Interpreten mit der Interpretation ein und desselben Transkripts beschäftigten. Die ganz unterschiedlichen Erfahrungen und Einstellungen, die verschiedene Interpreten in die Diskussion einbrachten[5], sicherten eine Vielfalt an Interpretationen und bildeten somit eine Grundlage für den Verstehensprozess der Probandenäußerungen und - handlungen. Im Anschluss an eine Episode wurde eine Vorhersage über den weiteren Verlauf der darauffolgenden Episode formuliert. „Mit der Formulierung von Vorhersagen werden bestimmte Theoriebasen ausgezeichnet und eigene Theorieentwicklungen angewendet“ (Krummheuer, 1992, 57).

Analyseeinheit in der turn-by-turn Analyse ist die Interaktionssequenz, wobei der jeweils folgende Gesprächsbeitrag oder die folgende Handlung unter der Frage analysiert wird, wie der vorhergehende Gesprächsbeitrag bzw. die vorhergehende Handlung verstanden wurde. Da sich die Interviewsituation von der Unterrichtssituation grundsätzlich unterscheidet, sind die Äußerungen eines Interviewers dem Ziel untergeordnet, „einen anderen Menschen zu verstehen“ (Rogers, 1976, 36). Die Äußerungen der Interviewerin stellten daher durch Paraphrasierung oftmals eine Spiegelung der Probandenäußerungen dar, und zwar durch die Frage, ob die Interviewerin das von der Versuchsperson Gesagte richtig verstanden habe. Durch die turn-by-turn Analyse wurden die in der extensiven Interpretation der jeweiligen Handlung oder Äußerung bewusst entwickelte Vielzahl von Interpretationsmöglichkeiten sukzessive eingeschränkt. In die zusammenfassende Interpretation flossen Gesamtinterpretationen der Episode mit der plausibelsten Begründung ein.

[5]Die Interviewtranskripte wurden durch verschiedene Interpreten diskutiert, deren Ergebnisse schlussendlich in die vorliegende Arbeit eingeflossen sind. Zu den Interpreten gehörten die Arbeitsgruppe „Algebraisches Denken“ unter der Leitung von L. Hefendehl-Hebeker, das mathematikdidaktische Forschungskolloqium der Universität Duisburg-Essen und die Arbeitsgruppe „Interpretative Unterrichtsforschung“ unter der Leitung von H. Jungwirth und G. Krummheuer.

Dies gab Anstoß zur Hypothesengenerierung und Theoriebildung.

Nach der Analyse mittels der geschilderten Interpretationsmaximen können bei Bedarf – also je nach speziellem Forschungsinteresse – Ergänzungen vorgenommen werden (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999, 71).

2.4.3.2 Argumentationsanalyse nach Toulmin

Im Hinblick auf das Forschungsinteresse an den von Kindern hervorgebrachten Begründungen der einzelnen Lösungsschritte wird – zusätzlich zu Krummheuers Ansatz – auch eine ergänzende Argumentationsanalyse an einzelnen Episoden durchgeführt. Dabei steht die Frage im Vordergrund, welche Typen von Argumenten in der Spanne zwischen „Situiertheit“ und „Allgemeinheit“ (Steinbring, 2000a) in Kontexten von Interviewaufgaben auftreten können.

Bei der Analyse von Argumentationsprozessen kann zwischen sozialen und inhaltlichen Aspekten, den Argumentationen und den Argumenten differenziert werden. „Argumentationen werden also als soziale Prozesse zwischen mehreren Individuen verstanden und Argumente sind die in diesen Prozessen zwischen den Individuen produzierten und im Sinne einer Begründung zueinander in Beziehung gesetzten (schul-)mathematischen Inhalte“ (Schwarzkopf, 2003, 212). Dabei wird in Anlehnung an Toulmin (1996) unter einem Argument ein Konstrukt verstanden, das als „Toulmin-Schema“ einen festen Bestandteil der neueren Argumentationstheorie bildet.

Der Gründer der Argumentationstheorie, der Wissenschaftsphilosoph Toulmin, hat in seinem Werk „Der Gebrauch von Argumenten“ Überlegungen zum Ablauf von Argumentationen angestellt. Sein Ansatz ist jedoch bei Philosophen nicht ganz unumstritten: ihm wird eine fehlende Allgemeingültigkeit vorgeworfen: „Toulmins Schema transportiert eine Ahnung von Dialogizität und Dynamik – eine Ahnung, nicht mehr“ (Wohlrapp, 2008, 24). Gleichwohl wird der Einsatz des „Toulmin-Schemas“ in einem Teibereich des Argumentierens, nämlich dem Begründen, akzeptiert.

Da einerseits gerade das Begründen im Fokus des Forschungsinteresses liegt und andererseits die Arbeiten Krummheuers (Krummheuer, 2003, 247ff.) und Schwarzkopfs (Schwarzkopf, 2003, 211ff.) die „argumentationsanalytische Praktikabilität“ (Kopperschmidt, 1989, 30) des Schemas nach Toulmin für die vorliegende Studie aufzeigen, hat die Autorin die Entscheidung getroffen, die Argumentationsprozesse nach diesem Schema zu rekonstruieren.

Beim Schema geht es darum, dass eine Behauptung aufgestellt, geäußert und begründet wird. Bei einer Argumententation schlägt Toulmin vor, die Redebeiträge in einzelne Äußerungen aufzuteilen und diese mit Blick auf ihre Funktion zu analysieren. Dabei unterscheidet Toulmin zwischen vier zentralen Kategorien einer Argumentation: „Data“ („Datum“), „Conlcusion“ („Konklusion“), „Warrant“ („Garant“ [6]) und „Backing“ („Stützung“). Diese Kategorien werden in Anlehnung an die 1975 veröffentlichte Monographie Toulmins „Der Gebrauch von Argumenten“ [7] erläutert.

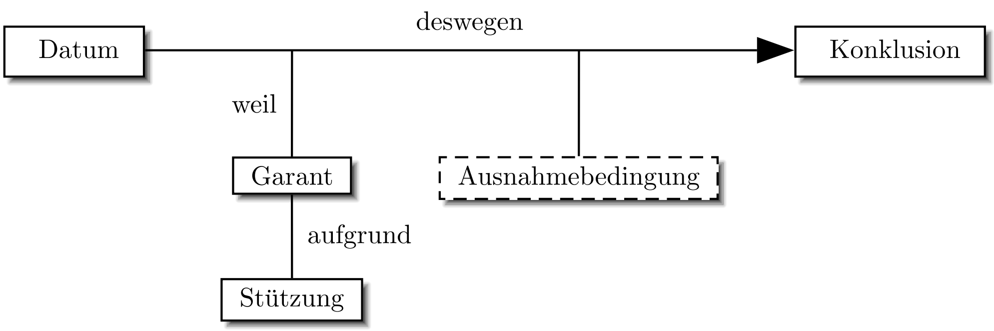


Abbildung 2.11: Toulmin-Schema der funktionalen Argumentationsanalyse

Die Konklusion ist die Aussage, die es argumentativ zu belegen gilt. Das Datum ist eine unbestrittene Tatsache, eine Information oder ein Sachverhalt, worauf als Antwort auf die Frage, wovon der Argumentierende ausgeht, verwiesen werden kann (vgl. Krummheuer, 2003, 248). Die bündigste Argumentation wäre dann: Datum, daher Konklusion. Eine derart erschlossene Konklusion kann im Weiteren auch als neues Datum verwendet werden. Garanten sind „allgemeine, hypothetische Aussagen, die als Brücken dienen können und diese Art von Schritten erlauben“ (Toulmin, 1975, 89). Die Garanten kommen in der Regel einer breiteren Möglichkeit der Argumentation gleich und können der Beantwortung der Frage „Wie kommst du dahin?“ dienen. Die Anwendbarkeit eines Garanten wird durch Stützungen herbeigeführt. Dies sind Tatsachen bzw. vom Kontext situativ abhängige Überzeugungen, die die Frage beantworten, warum der benannte Garant allgemein

[6] Im Englischen wird „Warrant“ oft mit „Schlussregel“ übersetzt. In dieser Studie wird die einprägsamere Bezeichnung „Garant“ in Anlehnung an Krummheuer & Naujok (1999, 72) gewählt, zumal Toulmin sich auch in seiner Terminologie von der formalen Logik abgrenzen will.

[7] Die Originalausgabe erschien 1969 unter dem Titel „The Uses of Argument“.

als zulässig akzeptiert werden soll (vgl. Krummheuer & Naujok, 1999, 71ff.). Darunter können etwa Gesetze, Statistiken, geteilte Erfahrungen usw. fallen. Neben diesen vier Modi der Argumentation sind noch Toulmins modale Operatoren und Ausnahmebedingungen zu nennen. Dies sind Angaben darüber, wie stark und bedeutend die Schlussfolgerung ist (etwa „notwendigerweise“ oder „vermutlich“) und darüber, unter welchen Umständen der Garant keine Anwendung findet. Die Ausnahmebedingung wird in dieser Studie in der Analyse nur bei Bedarf herangezogen.

2.4.3.3 Argumentationstypen nach Schwarzkopf

Eine der Forschungsinteressen dieser Studie lag darin, die Argumentationsprozesse von Kindern zu analysieren und u. a. herauszufinden, ob sie die algebraische Symbolsprache als Mittel der Argumentation verwenden. Um diese Forschungsfrage zu beantworten, war die Typisierung der von den Kindern verwendeten Argumente während der Aufgabenbearbeitung in Interviews notwendig. Die Bildung von Typen ist eine gesicherte Auswertungsmethode innerhalb der qualitativen Forschungspraxis, die dazu dient, den Untersuchungsgegenstand überschaubar zu machen und dessen charakteristische Merkmale hervorzuheben, sodass über Gemeinsamkeiten oder Ähnlichkeiten sowie über die ihnen möglicherweise zugrundeliegenden Mechanismen nachgedacht werden kann (vgl. Lamnek, 2005, 230).

Als theoretischer Ansatz für die Argumentationstypenbildung wurden die Analysen von Schwarzkopf (2003) herangezogen, welche im Laufe dieser Studie weiterentwickelt wurden. In seinen Ausführungen stellt Schwarzkopf drei Typen von Argumenten vor: empirische, empirisch-konstruktive und strukturell-mathematische. Empirische Argumente sichern das Auftreten eines Phänomens durch Überprüfung konkreter Fälle. Empirisch-konstruktive Argumente überprüfen, ob das beobachtete Phänomen sich an weiteren Beispielen finden lässt, allerdings ohne Hinweise auf ein zugrundeliegendes Prinzip. Strukturell-mathematische Argumente weisen strukturelle Beobachtungen auf, die über eine empirische Beobachtung hinausgehen. Dabei treten die konkreten Zahlen selbst in den Hintergrund; vielmehr wird die Rolle, die Funktion einer Zahl in der beobachteten Situation herangezogen.

Ausgehend von diesen Argumentationstypen Schwarzkopfs, welche auf die mathematischen Inhalte der Grundschule bezogen ausgearbeitet wurden, wurde für das vorliegende Projekt eine Weiterentwicklung dieses Typensystems vollzogen. Die einzelnen Typen wurden modifiziert und durch zwei weitere ergänzt, was sich

Tabelle 2.1: Argumentationstypen

Typ des Arguments	Merkmale und ihre Ausprägungen
Arithmetisch-numerisch	Überprüfung eines Sachverhaltes an einem oder mehreren konkreten Zahlen- bzw. vorgegebenen Beispielen.
Arithmetisch-konstruktiv	Übertragung der Vorgehensweise auf weitere, auch selbstgewählte Beispiele.
Arithmetisch-strukturell	Ein Muster wird beobachtet. Die Allgemeinheit des beobachteten Musters wird an einem konkreten Beispiel gezeigt.
Prä-algebraisch	Ein Muster wird strukturell erkannt. Die Übertragbarkeit der erkannten Struktur auf den allgemeinen Fall wird verbal oder mit Hilfe von Gegenständen, Zeichen, Symbolen oder Abkürzungen dargestellt.
Algebraisch	Ein Muster wird strukturell erkannt. Die Übertragbarkeit der erkannten Struktur auf den allgemeinen Fall wird mittels symbolischer Ausdrücke und ggf. Operationen formal dargestellt bzw. bewiesen.

im Laufe der Analyse aus dem Spektrum der von den Kindern eingebrachten Argumente ergab. Die Tabelle 2.1 stellt die fünf Typen von Argumenten dar.

Diese Kategorisierung ist nicht als Stufenmodell zu verstehen, bei dem es um hierarchisch geordnete Abstufungen geht, vielmehr spiegelt es die Vielfalt möglicher, durch Kinder vorgebrachter Argumente wieder. Denn die Art der Argumentation hängt maßgeblich von der eingenommenen Rahmung ab. „Für eine Aussage im Argument gibt es also eine Spanne an Deutungsmöglichkeiten zwischen einer Rechenrahmung und einer mathematisch-strukturellen Rahmung“ (Schwarzkopf, 2003, 221). In der Rechenrahmung entstehen die arithmetisch-numerischen und arithmetisch-konstruktiven Argumente, in der mathematisch-strukturellen Rahmung die arithmetisch-strukturellen, prä-algebraischen und algebraischen. Es ist offensichtlich, dass ein algebraischer Typ eines Arguments erst innerhalb einer Struktur-Rahmung und beim Vorhandensein des Formalisierungsmittels entstehen kann.

Die Rekonstruktion der Argumente erfolgte unmittelbar aus dem erhobenen Datenmaterial und stellte somit die tragende Grundlage der Interpretation dar. Diese Verfahrensweise lässt sich mit Bohnsack (2008) als *rekonstruktiv* bezeichnen. Damit ist u. a. gemeint, dass die Analysekategorien nicht aus allgemeinen Prinzipien abgeleitet, sondern erst im Forschungsprozess selbst herausgearbeitet werden, sodass zwischen der Forschungserfahrung und der methodologischen Begrifflichkeit eine reflexive Beziehung besteht. Dieses Analyseverfahren eignet sich insbesondere für die *komparative* und auch themenbezogene Auswertung von Interviews (vgl. Bohnsack, 2008, 57ff.). Der Vergleich einzelner Fälle mit Hilfe des *Typenmodells* soll zeigen, ob sich hinsichtlich der Strukturierungsprozesse und der Argumentationsgänge, Invarianten – auch über beide Kulturen hinweg – ausmachen lassen.

Kapitel 3

Die Emprische Vorstudie

In der empirischen Vorstudie werden die Daten der Untersuchungsphase I analysiert. In dieser Phase der Untersuchung wurden Probandenpaare zu den zuvor entwickelten und in Kapitel 2.3.1 vorgestellten Aufgaben interviewt. Anschließend werden allgemeine Beobachtungen zu dieser Untersuchungsphase zusammenfassend präsentiert.

3.1 Die Aufgabe MAMA

Auf dem Tisch lagen Kärtchen mit Fragen in einem Stapel mit dem Rücken nach oben, so dass die Fragestellungen nicht sichtbar waren. Jedes Kind erhielt ein Blatt mit zwei Folgen, von denen die eine aus Buchstaben und die andere aus Zahlen bestand.

M	A	M	A	M	A	M	A	M	···
1	2	3	4	5	6	7	8	9	···

Die Aufgabe der Kinder war es – wie in einem Spiel – die Fragen nach und nach zu beantworten. Ausführliche Aufgabenbeschreibung siehe Kapitel 2.3.1.

Die Kinder schalteten sich sofort in das „Spiel“ ein und regelten eigenständig, wer die Kärtchen umdrehte, ob die Kinder sich darin abwechselten, ob die Fragen laut vorgelesen wurden oder beide Beteiligten sie gleichzeitig für sich lasen und ob sie die Fragen zusammen oder nacheinander beantworteten.

Die ersten Kärtchen erhielten Fragen, wie etwa „Welcher Buchstabe steht über der 4?“; „Welche Zahl steht unter dem dritten M?“. Alle Kinder konnten diesen

Aufgabenteil bewältigen und die Feststellung treffen, dass über geraden Zahlen ein A und über ungeraden Zahlen ein M steht. Danach wurden schwierigere Fragen gestellt. Diese bezogen sich auf Bereiche der Folgen, die auf dem Blatt nicht mehr dargestellt waren. Zwei dieser weiterführenden Fragen werden hier genauer untersucht.

- Welche Zahl steht unter dem achten A?

  Die interpretative Auswertung der Interviewtranskripte hat gezeigt, dass sich die Lösungsstrategien der Kinder in Gruppen einteilen lassen. Eine Gruppe verwendete die Strategie des Weiterzählens, indem sie die Frage durch das schriftliche Fortsetzen beider Folgen bewältigte. Einige Schüler fingen dabei mit dem ersten A an, die anderen übernahmen als Stützpunkt das Resultat der vorherigen Frage und zählten ab dem fünften A weiter. Eine Schülerin begründete diese Vorgehensweise so: „Es fällt einem leichter, wenn man's aufschreibt, weil man sich es dann eben noch besser vorstellen kann.“ Es gab auch Schüler, die die gegebene Situation zu strukturieren versuchten. Hierbei zeichnen sich die folgenden beiden Vorgehensweisen ab: Ein Teil der Schüler zerteilte „die Leiste“ in Abschnitte und versuchte aus diesen Abschnitten das Ergebnis zusammenzusetzen: „Das vierte A steht über 8, dann noch mal dranhängen ergibt 16“. Der andere Teil der Schüler begründet sein Vorgehen damit, dass die erste gerade Zahl 2 sei und berechnet die achte gerade Zahl durch das Multiplizieren „2 mal 8“.

- Welche Zahl steht unter dem elften M?

  Bei der Bearbeitung dieser Frage hatten die Kinder eine ganze Reihe von Lösungsansätzen: von der Methode des Weiterzählens bis hin zur Methode, mit der die 11. ungerade Zahl als die nächste zur 10. geraden Zahl berechnet wurde. Dazwischen gibt es wiederum zwei Gruppen, die sich nach der Art des Vorgehens und Argumentierens voneinander unterscheiden. Während ein Teil der Schüler größere Abschnitte zusammensetzte (durch Anstückeln, Addieren, Verdoppeln), versuchte der andere Teil, die erkannte Struktur (Abstand zwischen zwei benachbarten ungeraden Zahlen) zu nutzen. Diese beiden zwar sehr unterschiedlichen aber sowohl in den deutschen als auch in russischen Interviews deutlich erkennbaren Vorgehensweisen werden im Folgenden durch Argumentationsbeispiele von Petra und Olga exemplarisch dargestellt:

Lösungsansatz von Petra

Petra versucht elf Ms in zwei „Fünf-M-Stücke“ und ein weiteres M zu gliedern: „Also, hier sind ja eins, zwei, drei, vier, fünf Ms, (*zeigt zählend mit dem Stift auf die Ms*), und hier unter dem fünf Stück steht ’ne neun, und wenn man neun plus neun rechnet, dann sind das achtzehn. Und dann müssen wir noch drei dazu nehmen, weil hier beim anderen M (*zeigt mit dem Stift auf das dritte M*) ist ’ne drei, also müssen wir plus drei nehmen, das sind dann einundzwanzig“.

Petra wendet die Additionsstrategie an, die bei der vorherigen Frage nach dem achten A gut funktioniert hat. Dabei merkt sie zum einen nicht, dass sich zwischen den beiden „Fünf-M-Stücken“ noch ein A befindet. Zum anderen nimmt sie fälschlicherweise an, der Abstand von einem zum nächsten M hätte die „Länge“ 3. Das erzielte numerische Ergebnis 21 ist richtig, weil die beiden Fehler zusammen einen richtigen Schluss ergeben. Da die Lösung – was auch ihren Vorüberlegungen entspricht – eine ungerade Zahl ist, bleiben der Schülerin beide Gedankenfehler verborgen.

Lösungsansatz von Olga

Olga nutzt die Einsicht, dass die Nummern von zwei benachbarten Buchstaben gleicher Art sich um zwei unterscheiden. Diese hat sie schon bei der Frage nach dem achten A verwendet, indem sie einen Zahlenterm $10 + (2 \cdot 3)$ erstellt und ausrechnet (Abb. 3.1).

Analog beantwortet die Schülerin die Frage nach dem elften M durch Erstellen des Zahlenterms $9 + (2 \cdot 6)$. Bei ihrer Argumentation rechnet die Schülerin zunächst aus, wie viele Sprünge vom fünften bis zum elften M benötigt werden – sie schreibt dies extra als $11 - 5 = 6$ auf und bewegt beim Reden rhythmisch springend die

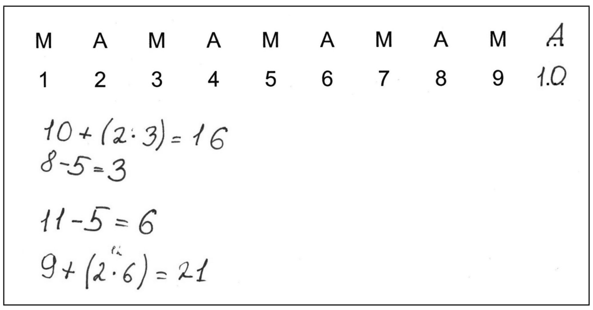


Abbildung 3.1: Aufgabe MAMA: Olgas Lösung

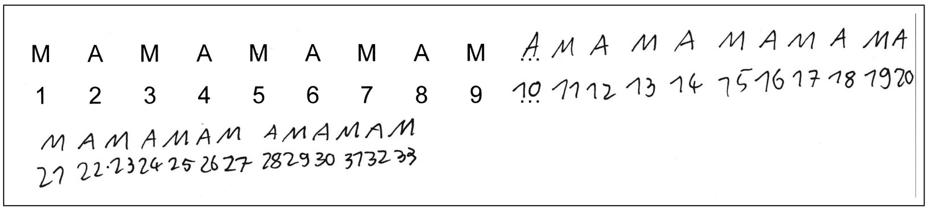


Abbildung 3.2: Aufgabe MAMA: Torstens Lösung

rechte Hand. Dann addiert sie zu der Zahl 9 unter dem fünften M die noch fehlende Anzahl von 6 Sprüngen, multipliziert mit der „Länge“ 2 des Sprungs.

Einige Schüler haben ihre Rechenschritte sogar in Form eines geschlossenen arithmetischen Terms dargestellt und dessen Wert ausgerechnet, wie z. B. Andreas: $9 + (11 - 5) \cdot 2 = 21$.

Aus psychologischer Sicht ist die in der MAMA-Aufgabe zuletzt gestellte Frage „Welcher Buchstabe steht über 33?“ interessant. Da die Schüler beider Länder anscheinend daran gewöhnt sind, dass die Teilfragen einer Aufgabe immer schwieriger werden, fühlten sich viele Kinder durch diese allerletzte Frage verunsichert. Einige haben die Frage falsch interpretiert, indem sie nach dem dreiunddreisigsten M gesucht haben; andere haben (um sicher zu gehen) die beide Folgen weiter aufgeschrieben und solche Lösungen wie Torsten (Abb. 3.2) präsentiert.

3.2 Die Aufgabe DREIECKE

Die ausführliche Aufgabenbeschreibung befindet sich in Kapitel 2.3.1.

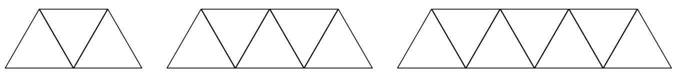


Abbildung 3.3: Figurenfolge Dreiecke

Die für interne Zwecke der Studie verwendete Aufgabenbezeichnung DREIECKE stand weder auf dem Bogen noch wurde sie von der Interviewerin im Gespräch erwähnt. Daher stand den Kindern die Interpretation der Figurenfolge völlig offen. Diese Offenheit der Betrachtung in einer sehr stark strukturierten Aufgabe führte nicht nur zu erwarteten Unterschieden in den Herangehensweisen der Schüler, sondern zum Teil auch zu unerwarteten Wahrnehmungen und Interpretationen des angebotenen Kontextes.

Unter den erfolgreichen Aufgabenbearbeitungen fanden sich bei den deutschen wie bei den russischen Kindern zwei grundlegend verschiedene Ansätze. An den Lösungen von zwei Fünftklässlern – Jan und Dennis – können exemplarisch typische Gedankengänge und Argumentationen aufgezeigt werden, die Schüler im Laufe der Studie hervorgebracht haben. Beide Kinder bearbeiten die Aufgabe auf grundsätzlich unterschiedliche Weise.

Lösungsansatz von Jan

Bei Betrachtung der Figurenfolge zählt Jan die Gesamtanzahl der Dreiecke in den ersten drei abgebildeten Figuren und stellt fest, dass die Zahlenfolge 3, 5, 7 dazu passen würde. Er bemerkt, dass bei der Fortsetzung der Figurenfolge „immer plus zwei“, also stets zwei neue Dreiecke hinzu kommen, was auch die von ihm vorgeschlagene Zahlenfolge widerspiegelt (Abb. 3.4). Seine Zählweise wird auch anhand der die Gedankengänge unterstützenden Gestik des Schülers erkennbar, indem er den „Zuwachs um zwei“ mit rhythmischen, sich wiederholenden Handbewegungen darstellt.

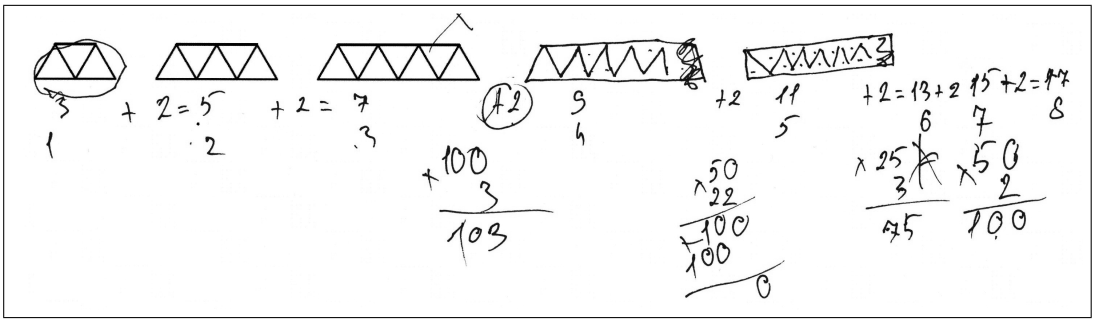


Abbildung 3.4: Aufgabe DREIECKE: Jans Lösung

Die achte Zahl der Folge ermittelt er, indem er schrittweise jeweils zwei hinzuaddiert und so auf das Ergebnis 17 kommt. In seinen Aufzeichnungen lässt sich erkennen, dass Jan bei der Frage nach der fünfzigsten Zahl der Folge nicht weiter schrittweise vorgeht, sondern versucht die Anzahl der neu dazu kommenden Zweien (in seinen Augen 50) für die Lösung zu nutzen.

Lösungsansatz von Dennis

Dennis betrachtet das Figurenmuster als Komposition von unterschiedlich gerichteten Dreiecken. Er gliedert das Figurenmuster in zwei Folgen von Dreiecken: in

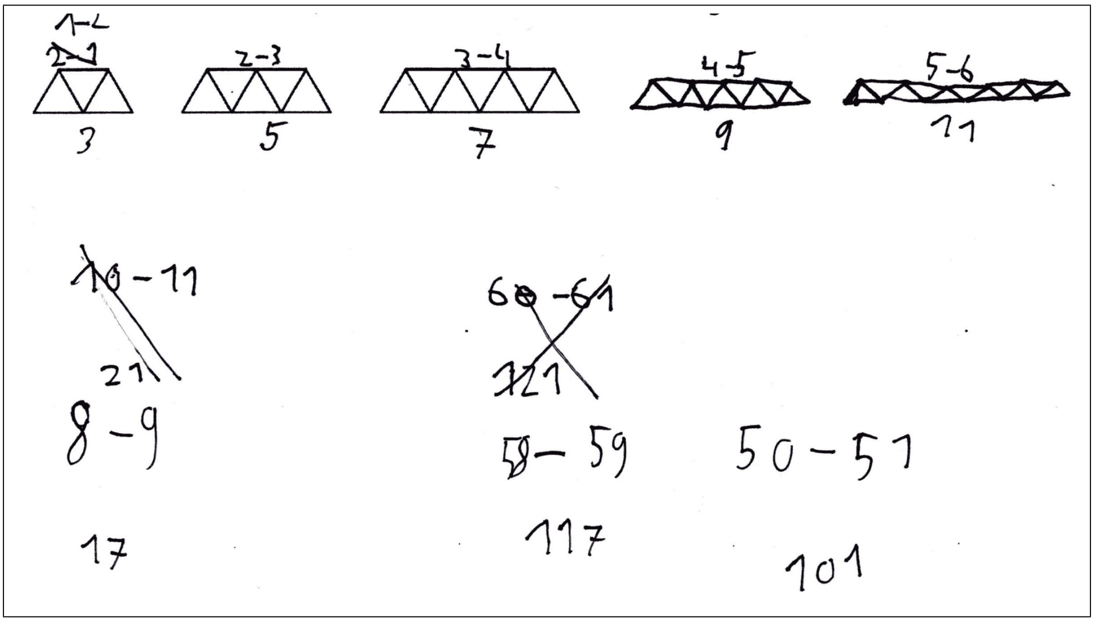


Abbildung 3.5: Aufgabe DREIECKE: Dennis’ Lösung

Dreiecke mit der Spitze nach „unten“ und in Dreiecke mit der Spitze nach „oben“ (Abb. 3.5). Seine Zählweise unterstützt der Schüler durch Gestik, indem er mit den Fingern der rechten Hand auf die Dreiecke mit den Spitzen nach unten und mit den Fingern der linken Hand auf die Dreiecke mit der Spitze nach oben zeigt.

Die Zahlenfolge $3, 5, 7$ entsteht bei Dennis aus der Addition „oben plus unten“, also $1 + 2$, $2 + 3$ und $3 + 4$. In seiner Notation z. B. $3 - 4$ benutzt Dennis den Strich als Zeichen um die Verbindungen zwischen den unterschiedlich gerichteten Dreiecken darzustellen. Mit dieser Vorgehensweise findet der Schüler die achte bzw. die fünfzigste Zahl der Zahlenfolge, indem er die Zahlen acht und neun bzw. fünfzig und einundfünfzig addiert.

Die oben angeführten Lösungsansätze repräsentieren zwei im Grundsatz verschiedene Sichtweisen bei der Erkennung von Mustern in Figurenfolgen: die dynamische und die statische Sichtweise. Wird ein *Veränderungsmuster* in den Fokus genommen, welches sich bei dem Übergang von einer Figur der Firgurenfolge zur nächsten zeigt, kann von einer *dynamischen* Sichtweise gesprochen werden (Abb. 3.6). Eine Sichtweise, die das *Strukturmuster* in Form und Zusammenbau einer jeden Figur der Figurenfolge in Betracht zieht, wird weiter als *statische* Sichtweise bezeichnet (Abb. 3.7). Somit weist die Lösung von Jan eine *dynamische* und die von Dennis eine *statische* Sichtweise auf.

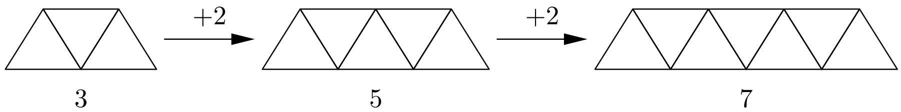


Abbildung 3.6: Dreiecke: Jan achtet auf die Veränderung von einer Figur zur nächsten (dynamische Betrachtung)

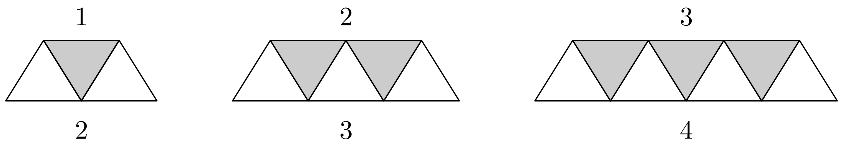


Abbildung 3.7: Dreiecke: Dennis achtet auf die Gliederung einer Figur in einzelne Teile (statische Betrachtung)

Würde man Jans dynamischen Lösungsansatz weiterführen, käme man zu folgender Lösung:

1. Figur	3		
2. Figur	$3+2$	$= 3 + 1 \cdot 2$	$= 3 + (2-1) \cdot 2$
3. Figur	$3+2+2$	$= 3 + 2 \cdot 2$	$= 3 + (3-1) \cdot 2$
4. Figur	$3+2+2+2$	$= 3 + 3 \cdot 2$	$= 3 + (4-1) \cdot 2$
5. Figur	$3+2+2+2+2$	$= 3 + 4 \cdot 2$	$= 3 + (5-1) \cdot 2$
Regel:	immer zwei dazu		
8. Figur	$3+2+2+2+2+2+2+2$	$= 3 + 7 \cdot 2$	$= 3 + (8-1) \cdot 2$
...			
50. Figur	...	$= 3 + 49 \cdot 2$	$= 3 + (50-1) \cdot 2$

In der ersten Spalte sind die Figurennummern aufgelistet. In der zweiten Spalte sind die Beobachtungen festgehalten, dass eine jede weitere Figur stets mit „plus zwei“ gebildet wird, somit im Verhältnis zur vorangehenden Figur zwei Dreiecke mehr enthält. Man kann die zeit- und platzraubende Additionsdarstellung durch Einführung der Vielfachen von 2 ersetzen. Diese ökonomische Schreibweise beinhaltet die dritte Spalte. In diesen Ausdrücken verändert sich stets nur der Faktor vor der Zahl 2, dieser hängt mit der Figurennummer in der Weise zusammen, dass er stets um 1 kleiner ist. So ist zum Beispiel in der 5. Figur 4 der Faktor vor der Zahl 2; 4 ist um 1 geringer als 5. Diese Regelmäßigkeit findet sich, eingekleidet in einen arithmetischen Term, in der vierten Spalte.

Verallgemeinert man diese Erkenntnis und drückt sie mit algebraischen Mitteln aus, kommt man zu einem geschlossenen Term für die Ánzahl der Dreiecke in einer beliebigen Figur: $3 + (n - 1) \cdot 2$.

Dieses Verfahren kann auch dann verfolgt werden, wenn man nicht von der ersten Figur der Figurenfolge und dem damit verbundenen ersten Glied 3 der Zahlenfolge ausgeht, sondern die Situation ab der Stelle weiterentwickelt, die schon festgestellt und bewältigt ist. So bestimmt ein Kind die Anzahl der Dreiecke in der 50. Figur, indem es von den 11 Dreiecken in der 5. Figur ausgeht und 45 Schritte bis zur 50. Figur berücksichtigt: $11 + (50 - 5) \cdot 2 = 101$.

Würde man den statischen Lösungsansatz von Dennis weiterführen, käme man zu folgender Lösung:

Folge “oben”:	1	2	3	4	5	$\cdots$	8	$\cdots$	50	
Folge “unten”:	2	3	4	5	6	$\cdots$	9	$\cdots$	51	
1. Figur	$1 + 2$									
2. Figur	$2 + 3$									
3. Figur	$3 + 4$									
4. Figur	$4 + 5$									
5. Figur	$5 + 6$									
Regel:	oben die Figurennummer, unten eine Zahl, um 1 größer als oben									
8. Zahl	$8 + 8 + 1$									
$\cdots$										
50. Zahl	$50 + 50 + 1$									

Die zwei Zahlenfolgen geben hier die Anzahl der „oberen“ und „unteren“ Dreiecke jeder Figur wieder (s. Markierung in Abb. 3.5). Um die Gesamtanzahl der Dreiecke bei jeder Figur zu ermitteln, zählt man die „oberen“ und „unteren“ Dreiecke zusammen. Für die 4. Figur z. B. rechnet man $4 + 5$, da die Figurennummer gleich ist mit der Anzahl der „oberen“ Dreiecke.

Analysiert man dieses Rechenverfahren, kann man erkennen, dass das Addieren der Figurennummer und der nächsten natürlichen Zahl eine allgemeine Lösung des Problems bietet. Das hier in den Fokus genommene Strukturmuster – Form und Aufbau einer jeden Figur der Figurenfolge – führt somit zu einer expliziten symbolischen Darstellung: $n + (n + 1)$.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe konnten auch andere, manchmal überraschende Vorschläge beobachtet werden. Eva sieht in dem gegebenen Anfangsstück der Musterfolge eine gebrochene Kette mit fehlenden Gliedern und rahmt ihren Ansatz als Reparaturlösung (Abb. 3.8). Dementsprechend löst Eva die erste Teilaufgabe „Betrachte die Musterfolge und ergänze sie um zwei weitere Muster“, indem sie die Lücken zwischen drei getrennten Teilen dieser Kette schließt. Erst beim Lesen der weiteren Teilaufgaben und im Laufe des Gesprächs zieht Eva auch eine andere Möglichkeit in Betracht.

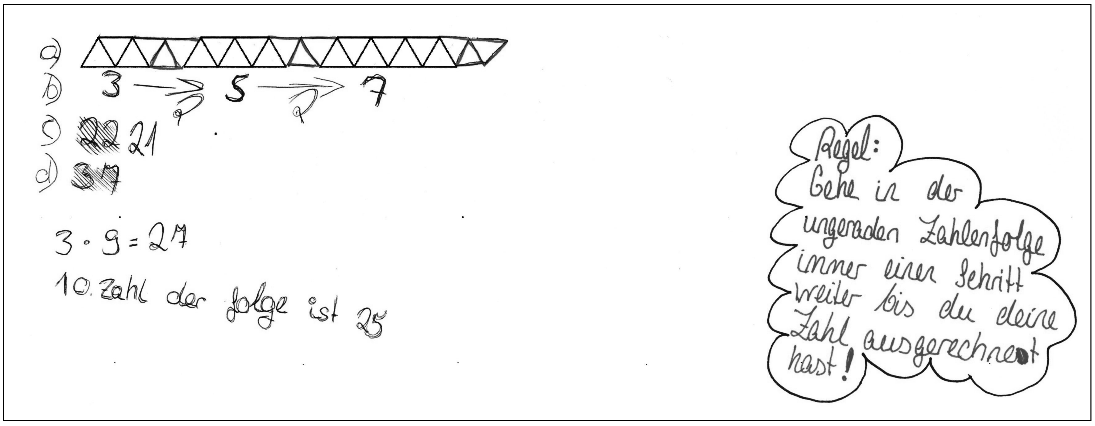


Abbildung 3.8: Aufgabe DREIECKE: Evas Lösung

Jessica (Abb. 3.9) fällt es schwer, eine Gesetzmäßigkeit in der Figurenfolge zu erkennen. Sie nummeriert die ersten mit der Spitze nach oben gezeichneten Dreiecke fortlaufend und schafft es, die weiteren zwei Figuren der Bildfolge zu zeichnen. Die Frage nach der fünfzigsten Figur der Folge beantwortet die Schülerin so:

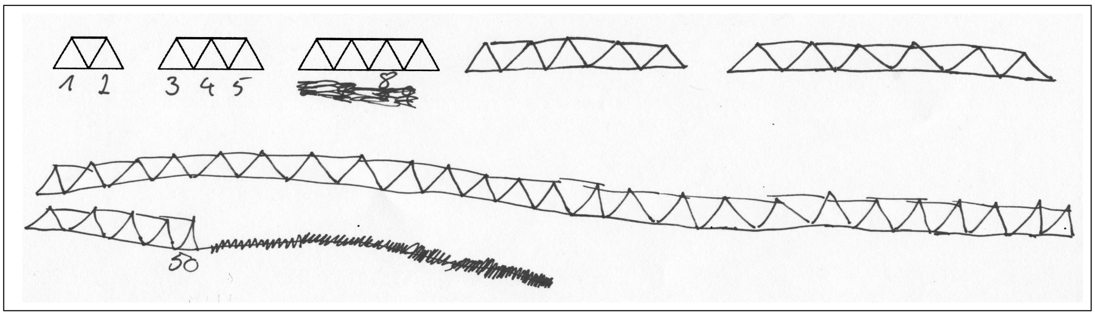


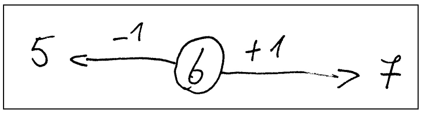
Abbildung 3.9: Aufgabe DREIECKE: Jessicas Lösung

3.3 Die Aufgabe ZAHLENSTRAHL

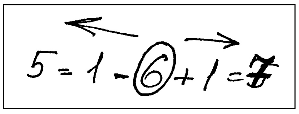
Bei der Interviewsequenz zur Bearbeitung der Aufgabe ZAHLENSTRAHL sollten die Kinder sich Gedanken darüber machen, wie man den Vorgänger und den Nachfolger einer natürlichen Zahl bestimmt.

Wie die Analyse der erhobenen Daten zeigt, war es für alle Probanden ersichtlich, dass die Reihe der natürlichen Zahlen sich durch fortlaufende Addition von 1 zu einer beliebigen Anfangszahl konstruieren lässt. Somit konnten alle Kinder mehrere konkrete Beispiele von Tripeln benachbarter Zahlen benennen und das erkannte Muster verbal beschreiben, nämlich, dass man durch Addition oder Subtraktion von 1 die jeweiligen Nachbarn einer belibigen natürlichen Zahl herausfinden kann. Im nächsten Schritt sollten die Schüler ihre Erkenntnisse in einer Weise verschriftlichen, wie sie es für ein Mathemathikbuch für Fünftklässler für richtig und verständlich hielten.

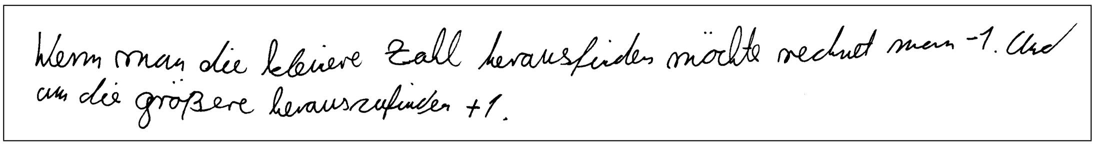
Von Interesse sind die unterschiedlichen Mittel, mit denen die Schüler die Aufgabe angehen. Viele Kinder verfassen einen Text, der in Form einer allgemeinen Regel einen Algorithmus beschreibt, wie man – von einer Zahl ausgehend – die entsprechenden Nachbarn bestimmen kann. Einige Versuchspersonen fügen konkrete Beispiele in Form eines Diagramms zu ihren narrativen Beschreibungen hinzu und verwenden dabei einstellige Zahlen (Abb. 3.10).



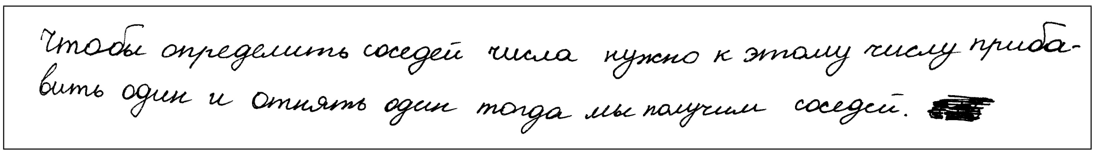
(a) Deutschland



(b) Russland



(c) Deutschland



(d) Russland

Abbildung 3.10: Aufgabe ZAHLENSTRAHL: Typische Darstellungen

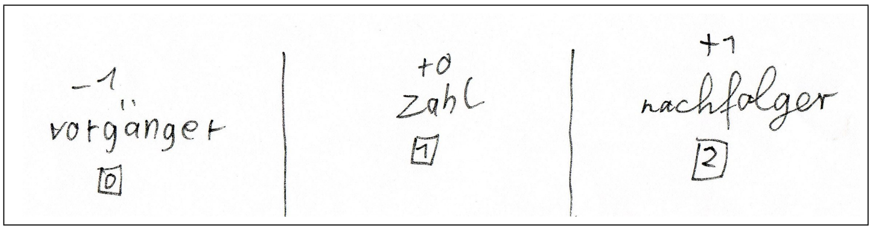


Abbildung 3.11: Aufgabe ZAHLENSTRAHL: Michaels Darstellung

Diese einstelligen Zahlen sind in ihren Augen offensichtlich zur Illustration von übersichtlichen Beispielen in einem Schulbuch geeignet. In den diagrammatischen Darstellungen verwenden die Kinder zwar die Zeichen der Rechenoperationen (wie + und −) sowie Gleichheitszeichen und Pfeile, allerdings in beiden beteiligten Ländern häufig nicht den arithmetischen Konventionen entsprechend. Dies lässt den Schluss zu, dass diese Vorgänge als Abbild eigener Vorstellungen auf den potentiellen Leser des Mathematikbuches übertragen und für eine „einfache und plausible Erläuterung“ gehalten werden.

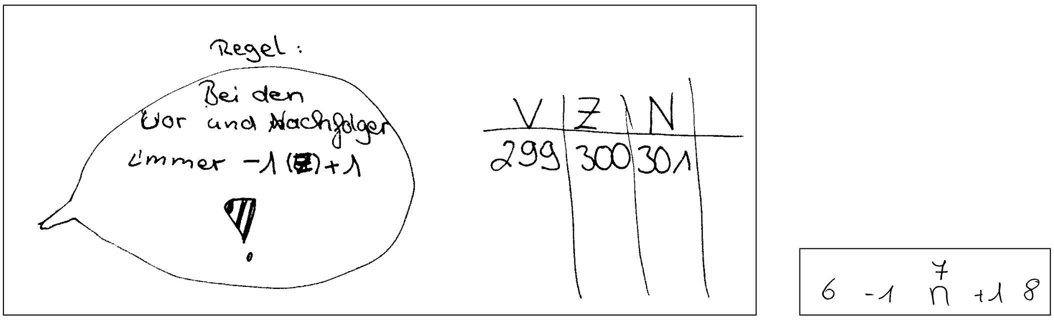
Andere Kinder gehen ähnlich vor wie Michael (Abb. 3.11), indem sie in ihren Darstellungen mehrere Ebenen (u. a. Beschreibungen, Zahlenbeispiele) vereinen. Die Darstellung von Michael enthält drei Ebenen:

- obere Ebene: Angabe der auszuführenden Operationen
- mittlere Ebene: begriffliche Beschreibung
- unterste Ebene: Zahlenbeispiel

Diese reichhaltige Darstellung zeigt, wie man zu jeder Zahl ihre Nachbarn durch Addition bzw. Subtraktion von 1 bestimmen kann.

Andere Kinder wiederum fertigen wie Verena (Abb. 3.12(a)) eine Tabelle an, malen eine Sprechblase und platzieren darin eine Merkregel in verkürzter Form, die sowohl Abkürzungen einzelner Wörter durch Buchstaben – Z für eine beliebige Zahl, V für ihren Vorgänger, N für ihren Nachfolger – als auch eine diagrammatische Veranschaulichung der durchzuführenden Operationen der Subtraktion bzw. Addition beinhaltet.

Bezeichnend ist, dass die hierbei gewählten Zahlen oftmals mehrstellig sind. Die bewusste Wahl dieser großen Zahlen wird damit begründet, dass das Rechnen mit größeren Zahlen noch schwieriger ist, als das Rechnen mit einstelligen Zahlen. Vermutlich werden solche recht großen Zahlen – wie etwa 300 in Verenas Darstellung – aus dem Grund verwendet, dass sie nicht besonders gut greifbar oder schwer



(a) (b)

Abbildung 3.12: Aufgabe ZAHLENSTRAHL: Verenas Lösung

vorstellbar sind, die Rechnung mit ihnen für die Kinder somit eine Art Verallgemeinerung der Situation darstellt. Auch hierbei beschriften viele der Probanden die Zeilen bzw. Spalten der Tabelle mit den Buchstaben V, N und Z mit der Erläuterung, dass das Z z. B. für „die Zahl“ steht.

Ferner wurden die Schüler gebeten, darüber nachzudenken, wie die von ihnen aufgestellte Regel bei einer – durch den Buchstaben n repräsentierten – beliebigen Zahl auszusehen hätte. Die Interviewerin legte dabei ein Kärtchen – gleicher Größe und Form, wie die Kärtchen mit den Zahlen 0 bis 15 – mit dem Buchstaben n auf den Tisch. Zu beobachten war, dass die Kinder nur wenig mit der Bezeichnung n für die beliebige Zahl anfangen konnten. Entweder verbanden sie einzelne Buchstaben mit dem Alphabet oder mit der Abkürzung eines Wortes. Diese vielfach eingenommene Rahmung führte zu der Schlussfolgerung, dass m als Vorgänger und o als Nachfolger einer beliebigen Zahl n auftreten sollten. Somit verbanden die Probanden die Buchstaben nicht mit Zahlen oder Rechenoperationen, sondern sahen sie in einer alphabetischen Reihenfolge. Die Tatsache, dass sowohl im lateinischen als auch im kyrillischen Alphabet die Buchstaben „m, n, o“ in derselben Reihenfolge auftreten, erklärt die Übereinstimmung der Antworten, die deutsche und russische Schüler gegeben hatten. Zu den russichen Schülern kann ergänzend angemerkt werden, dass sie alle, ob aus dem englischen oder französischen Fremdsprachenunterricht, bereits mit dem lateinischen Alphabet vertraut waren und aus diesem Grund das Kärtchen mit n als Signal zur Verwendung des lateinischen Alphabets interpretiert hatten.

Im weiteren Verlauf der Interviewsequenz wurde den Kindern vorgeschlagen, sich n als Repräsentanten einer konkreten Zahl, etwa der 7, vorzustellen. Bei diesem

Rückzug in die Welt der konkreten Zahlen konnten die Probanden – wie Verena – die entsprechende Zahlenwerte für die benachbarten Zahlen ausrechnen (Abb. 3.12(b)). Charakteristisch war dabei die Antwort von Kevin, dass dann das m die 6 und das o die 8 repräsentierten (Abb. 3.13). Kevin hatte diese Problemstelle sogar thematisiert. Durch seine Bemerkung „Wenn man eine neue Rechenart erfinden würde, vom Alphabet" zeigte das Kind, dass es das Prinzip eventuell schon vorahnend erkannt hatte und realisiert hatte, dass es sich um eine Rechenoperation handeln müsse. Jedoch erfordert ein selbständiger Schritt zu der Darstellung $n+1$ offensichtlich ein überaus hohes Maß an Abstraktionsvermögen, um ihm selbständig zu gehen und blieb für das Kind zunächst unzugänglich.

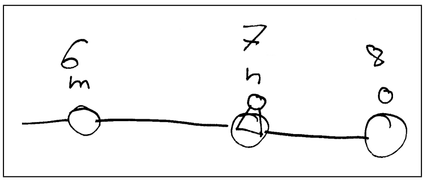


Abbildung 3.13: Aufgabe ZAHLENSTRAHL: Kevins Lösung

Nachdem die Interviewerin die Kärtchen mit den Termen $n + 1$ und $n - 1$ ins Spiel brachte, traten in den Antworten der Probanden sichtbare Unterschiede auf. Während einige Kinder nichts mit den Kärtchen anzufangen wussten, waren andere wiederum in der Lage, ihre vorherigen Erkenntnisse umzusetzen. Sie konnten die Kärtchen an den korrekten Stellen auf dem Zahlenstrahl platzieren und erklärten, dass bei der Ausgangszahl 7 der Term $n + 1$ für 8 und der Term $n - 1$ für 6 stehen müssten. Zwar waren diese Schüler nicht aus eigenem Antrieb auf die Idee der Bezeichnung $n + 1$ und $n - 1$ gekommen, doch gelang ihnen die Umdeutung der Situation dadurch, dass sie die Buchstaben nicht mehr in ihrem eigenen (alphabetischen) Sinn, sondern als Repräsentanten von Zahlen zu betrachten begonnen hatten. Die Begriffe „Vorgänger" und „Nachfolger" wurden mit einer formalen Darstellung veranschaulicht. Einige Schüler konnten sogar die Frage nach dem Vorgänger des Vorgängers mit $n-2$ und nach dem Nachfolger des Nachfolgers entsprechend mit $n + 2$ beantworten, ohne diese Zettel zuvor gesehen zu haben. Auch konnten diese Schüler konkrete Zahlenbeispiele zu diesen Termen liefern.

3.4 Allgemeine Beobachtungen der Untersuchungsphase I

Die vorangegangenen Interviews und deren Analyse hatten zum Ziel, den aktuellen Entwicklungsstand der Fünftklässler in Bezug auf ihr Strukturierungs- und Argumentationsvermögen sowie ihre Vorgehensweisen bei der Auseinandersetzung mit Aufgaben zur Mustererkennung festzustellen, zu vergleichen und Hypothesen über die Zone ihrer nächsten Entwicklung aufzustellen. Der Fokus dieser Hypothesenbildung lag in der Frage, ob die 10 bis 11-jährigen Lernenden bereit sein können, die Idee der Formalisierung aufzunehmen, zu verstehen und in der Lage wären Symboldarstellungen zu nutzen.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse der Untersuchungsphase I ließ sich feststellen, dass der größte Teil der Schüler bei der Bearbeitung von Buchstaben- und Figurenfolgen Muster erkennen konnte und die Erkenntnisse weitgehend zur Beantwortung weiterführender Fragen der jeweiligen Aufgaben genutzt hat. Dabei konnten zwei im Grundsatz verschiedene Herangehensweisen beobachtet werden: die dynamische und die statische. Bei der dynamischen Sichtweise wird ein Veränderungsmuster in den Fokus genommen, bei der statischen ein Strukturmuster.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben trat für die Probanden eine Reihe von Herausforderungen auf. Manche Probanden haben auf der zeichentechnischen Ebene Schwierigkeiten, die Form der Figuren wiederzugeben und die Figurenfolge fortzusetzen. Es ist jedoch gerade die zeichnerische Fortsetzung der Figurenfolge, die eine Gelegenheit zur aktiven Auseinandersetzung mit der zu erkennenden Struktur eröffnet. Diese Auseinandersetzung bietet die Möglichkeit, sich der eigenen - dynamischen oder statischen - Vorgehensweise bewusst zu werden. Weitere Schwierigkeiten bereitet vielen Lernenden die strukturelle Beschreibung der erkannten Gesetzmäßigkeit. Es werden oft lediglich die ausgerechneten Ergebnisse des Zählens schriftlich festgehalten, nicht jedoch der Rechenweg in Form eines arithmetischen Terms. Dadurch bleibt es dabei, dass dem Lernenden die eigene Vorgehensweise nicht so bewusst ist, dass sie auf der symbolischen Ebene explizit gemacht werden kann. In ihren Argumentationen gingen die Kinder größtenteils narrativ vor und stützten sich dabei auf die erkannten Zahlenfolgen. Losgelöst von den geometrischen Figurenmustern zogen sie als Garanten für ihre Begründung die Zahlenfolgen heran. Damit war es für sie schwierig, das in der Figurenfolge verborgene Bauprinzip zu erfassen, da es rein durch die Betrachtung der Zahlenfolge nicht zum Vorschein kommt.

Für diejenigen, die den individuellen Rechenweg in einem arithmetischen Term festzuhalten im Stande sind, stellt der für die Aufstellung eines algebraischen Terms erforderliche Verallgemeinerungsschritt häufig ein Problem dar. Um die eigene Vorgehensweise allgemein beschreiben zu können, ist es notwendig von den konkreten Zahlenwerten zu abstrahieren und den Bezug zu den Figurennummern herzustellen. Dazu ist es erforderlich eigene Erkenntnisse begrifflich formulieren zu können.

Die von Kindern erkannten Muster erscheinen in individuell unterschiedlichen Strukturierungen, denen verschiedene Formelausdrücke entsprechen. Dabei differenzieren sich die auftretenden Herausforderungen beim Erstellen eines algebraischen Terms in typische Hürden für statisch bzw. dynamisch vorgehende Kinder.

Kinder mit dynamischer Sichtweise erstellten zunächst eine rekursive Zahlenfolge, die durch das Hinzufügen eines bestimmten Summanden aufgebaut war. Erst im zweiten Schritt konnten sie den Rechenweg mittels Ersetzung der Addition durch die Multiplikation verkürzen. Dabei entstand ein Faktor, der sich von Folgeglied zu Folgeglied veränderte. Viele Probanden, die darauf fokussiert waren, den Zahlenwert des arithmetischen Terms sofort auszurechnen, konnten die Rolle des Faktors in Bezug auf die Figurennummer weder erkennen noch zum Ausdruck bringen.

Auch Kinder mit statischer Sichtweise hatten oftmals Schwierigkeiten, ihre Erkenntnisse begrifflich zu formulieren. Zwar konnten sie situationsbezogen Werte zu konkreten Figuren berechnen, jedoch nicht den Bezug der verwendeten Zahlen zur Figurennummer herstellen. Wenn aber die Erkenntnis fehlte, dass die verwendete Zahl in Abhängigkeit zur Figurennummer steht, konnte der weitere Schritt zur allgemeinen Lösung nicht gegangen werden.

Die Ergebnisse der Untersuchungsphase I ermöglichten es, folgende Arbeitshypothesen zu generieren:

- Schüler der Jahrgangsstufe 5 sind bereits in der Lage, die Idee der Formalisierung aufzunehmen und sich mit symbolischen Darstellungen zu befassen.
- Mit Aufgaben zur Erkennung von Mustern und Beziehungen in Figurenfolgen können Schüler der Jahrgangsstufe 5 Erfahrungen in strukturierter Arithmetik sammeln und sich an die Symboldarstellung gewöhnen. Dadurch kann die Grundlage für einen verständigeren Umgang mit Variablen und algebraischen Ausdrücken gelegt werden.

Kapitel 4

Die Empirische Hauptstudie

In diesem Kapitel werden die empirischen Analysen vorgestellt, die im Rahmen der Untersuchungsphase II – Interviewserie II – durchgeführt wurden. Die davor stattgefundene Phase der Unterrichtsaktivitäten spielt in dem Projekt als Zwischenschritt eine wichtige Rolle, weil hier die erste Begegnung mit einer einzelnen Variablen erfolgt. Der Unterrichtsverlauf ist nicht Gegenstand der Untersuchung, da dies den Rahmen des Projekts überstiegen hätte. In der Untersuchungsphase II spielen die Abläufe des Unterrichts jedoch eine bedeutende Rolle. Diese Interviewserie umfasst drei Aufgaben, die hier in der Reihenfolge KREISE, WÜRFELSCHLANGE und ZAHLENSUMME bearbeitet werden. Dabei erfolgt die Analyse in jeder Aufgabe zunächst anhand ausgewählter Fallstudien, die auch komparativ gegenüber gestellt werden. In einem vergleichenden Überblick werden anschließend die Schülerlösungen aller 24 Studienteilnehmer analysiert, wobei besonders interessante Aspekte der kindlichen Deutungsprozesse aufgezeigt und Muster in den Verhaltensweisen hervorgehoben werden.

4.1 Fallstudien

Für die Fallstudien wurden aus dem umfangreichen Datenmaterial die Interviews mit drei Kindern ausgewählt, wobei die Auswahl an folgende Kriterien gebunden war:

- Die Rahmenbedingungen – Klassengemeinschaft, Alter, Lehrer, Unterrichtsablauf bei der Einführung des Variablenbegriffs – sollten vergleichbar sein;

- Die Vorgehensweisen der Kinder sollten interessante Aspekte beinhalten und Unterschiede aufweisen;
- Die ausgewählten Interviews sollten unterschiedliche Stadien der Entwicklung des algebraischen Denkens illustrieren.

Aufgrund der o. g. Überlegungen wird die Interpretation eines kompletten Interviews mit jeweils einem von drei Schülern – Kevin, Laura und Michael – einer fünften Klasse eines Essener Gymnasiums dargestellt. Nach Einschätzung der Mathematiklehrerin der drei Probanden konnte das mathematische Leistungsvermögen zu Beginn der Studie von Kevin als stark, von Laura als relativ gut und von Michael als schwach bezeichnet werden. Es schien mir wichtig, alle Aufgabenbearbeitungen der drei ausgewählten Probanden in der gleichen Ausführlichkeit zu präsentieren, denn erst dann werden der Facettenreichtum in den Überlegungen der Kinder sowie die deutlichen Unterschiede in den Entwicklungsstadien des algebraischen Denkens ersichtlich. Es wird das gesamte Interview mit allen drei Aufgaben analysiert; bei Bedarf werden die Interviewsequenzen in Episoden untergliedert, die vergleichbare Aktivitäten in allen Fallstudien darstellen. Besonders markante Stellen werden wörtlich, die übrigen paraphrasierend wiedergegeben. Die vollständigen Transkripte finden sich im Anhang.

4.1.1 Fallstudien zur Aufgabe KREISE

In dieser Aufgabe erhalten die Kinder einen Bogen mit abgebildeten Figurenfolgen und sollen die darunter befindliche Tabelle ausfüllen. Gefragt wird nach der Anzahl der gelben, blauen und aller Kreise zusammen bei unterschiedlichen Figurennummern. Die Konzeption der Aufgabe KREISE ist in Kapitel 2.3.3 eingehend beschrieben.

Gesondert eingegangen wird hier unter anderem auf die individuelle Strukturierungsweise und den Umgang mit der formalen Sprache.

4.1.1.1 Kevin

Das gesamte Interview mit Kevin umfasste ca. 30 Minuten; die erste Aufgabe KREISE nahm davon 5 Minuten in Anspruch.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die schriftlich festgehaltenen Arbeitsergebnisse von Kevin.

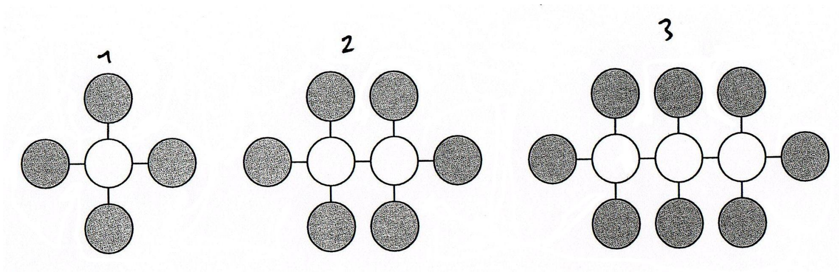


Abbildung 4.1: Von Kevin durchnummerierte Figuren zur Aufgabe KREISE

Figurennummer	1	2	3	4	…	n	…	7	…	50
Anzahl der gelben Kreise	1	2	3	4		$n \cdot 1$		7		50
Anzahl der blauen Kreise	4	6	8	10		$n \cdot 2 + 2$		16		102
Anzahl der Kreise insgesamt	5	8	11	14		$n \cdot 3 + 2$		23		152

Abbildung 4.2: Aufgabe KREISE: Kevins Lösung

Die Interviewsequenz mit der Bearbeitung der Aufgabe KREISE lässt sich in vier Episoden einteilen: In der Episode 1 (Transkriptzeilen 1–9) bestimmt Kevin die Anzahlen der gelben Kreise, trägt seine Ergebnisse in die erste Zeile der Tabelle ein und formuliert einen Term für die n-Spalte. In der Episode 2 (Transkriptzeilen 10–33) ermittelt der Schüler die Anzahlen der blauen Kreise konkret und allgemein. In der Episode 3 (Transkriptzeilen 34–36) berechnet Kevin die Gesamtanzahl der Kreise für die Spalten mit konkreten Zahlenwerten. Anschließend verallgemeinert er sein Vorgehen in einem Term durch Addition der in den ersten beiden Episoden erstellten Terme. In der Episode 4 (Transkriptzeilen 37–44) reflektiert der Schüler die in den Unterrichtsaktivitäten behandelten Arbeitsblätter und erkennt ein allgemeines Prinzip, welches allen Aufgaben zugrunde liegt.

Episode 1: Kevin bestimmt die Anzahl der gelben Kreise

Kevin beginnt die Bearbeitung der Aufgabe damit, dass er die drei abgebildeten Figuren der Figurenfolge durchnummeriert (Abb. 4.1) und in Verbindung mit der Tabelle bringt:

2 K ... das steht dann ja auch an der Tabelle und da soll ich jetzt die Gelben zählen, die Blauen zählen und dann, äh, insgesamt.

Die n-Spalte der Tabelle (Abb. 4.2) versteht Kevin als eine Aufforderung, eine Gesetzmäßigkeit zu finden, mit einem Term zu erfassen und in den nächsten Spalten anzuwenden.

4 K Eine Gesetzmäßigkeit, also dann mit n und mit der Gesetzmäßigkeit dann die beiden hier (*zeigt auf die letzten beiden Spalten*) ausrechnen.

Die Anzahl der gelben Kreise bei den Figuren 1 bis 3 liest Kevin von den Abbildungen ab, führt die Figurenfolge vor seinem geistigen Auge fort, erkennt eine Regelmäßigkeit und folgert daraus, dass bei der nächsten Figur vier gelbe Kreise vorhanden sein müssen. Beachtenswert ist, dass der Schüler im gleichen Atemzug die erkannte Regelmäßigkeit in einen algebraischen Term fasst. Dies bestätigt, dass er den Zusammenhang von Figurennummern und Anzahl der gelben Kreise festgestellt hat und verallgemeinern kann:

6 K Also die erste Figur hat einen gelben (*schreibt die Zahl 1 in die Tabelle*). Die zweite zwei, die dritte drei, ja und dann die vierte vier (*schreibt dabei in die Tabelle*), also ist die Formel n, n mal eins.

Kevin scheint bei den Unterrichtsaktivitäten verinnerlicht zu haben, dass ein Buchstabe als Repräsentant für eine beliebige natürliche Zahl stehen kann, und geht mit dem Symbol n somit genauso um wie mit jeder anderen Figurennummer. Jedoch trägt er in der n-Spalte der Tabelle nicht einfach den Term n, sondern den Term $n \cdot 1$ ein. Sein Vorgehen lässt sich höchstwahrscheinlich wie folgt erklären. Kevin hält das Tabellenfeld in der n-Spalte für einen für „die Formel“ (vgl. Transkriptzeile 6) reservierten Platz; eine Formel deutet er als ein Konstrukt der Form „n Verfahrensregel, die angibt, was mit dem n gemacht werden soll“. Die Vorstellung, dass eine Regelmäßigkeit in Form eines linearen Terms beschrieben wird, bei dem ein Faktor vor der Variable und/oder ein konstanter Summand vorhanden sein müssen, hat sich der Schüler wohl im Unterricht bei der Besprechung der Arbeitsblätter eingeprägt. [1]

Als nächstes trägt Kevin die Anzahl der gelben Kreise für die Figurennummern 7 und 50 ein. Er ist sich der erkannten Gesetzmäßigkeit sehr sicher und sieht daher auch keinen weiteren Erklärungsbedarf:

[1] Diese Vermutung verstärkt sich beim Vergleich der Aufgabenlösungen von Mitschülern der gleichen Klassengemeinschaft mit Aufgabenlösungen in anderen Untersuchungsklassen.

8 K So, und dann hat die siebte natürlich sieben und die fünfzigste fünfzig.

Episode 2: Kevin bestimmt die Anzahl der blauen Kreise

Die Episode beginnt damit, dass Kevin die Anzahl der blauen Kreise in der ersten Figur vom Bild abliest und die Zahl 4 in die Tabelle einträgt. Die Interviewerin bittet ihn, ihr diese vier Kreise zu zeigen. Hierbei zählt der Schüler die Kreise, beginnend mit dem untersten Kreis, im Uhrzeigesinn ab und tippt diese dabei mit dem Stift an.

Nachdem er die gesuchte Anzahl der blauen Kreise in den Figuren 2 und 3 in die Tabelle eingetragen hat, wird Kevin gebeten, auch bei der Figur 3 die erfassten blauen Kreise aufzuzeigen. Dabei geht er mit dem Kreis unten links beginnend gegen den Uhrzeigersinn vor. Den äußeren Anzeichen nach benutzt der Schüler kein besonderes Prinzip, um die Figurenteile zu erfassen. Dennoch erkennt Kevin in der Zahlenfolge der blauen Kreise sogleich eine Regelmäßigkeit und drückt es wie folgt aus:

18 K ... weil das sind immer zwei mehr
19 I Mmh
20 K Von Figur zu Figur (*schreibt 10 in die Tabelle*).

Auf diese Weise bestimmt Kevin die Anzahl der blauen Kreise für die nicht abgebildete vierte Figur. Er zeigt damit, dass er die Beziehung zweier benachbarten Figuren erfassen und diese als Gesetzmäßigkeit auch auf die nächst höhere Figurennummer übertragen kann.

Die Interviewerin bittet Kevin, diejenigen Kreise zu identifizieren, die von Figur 2 zu Figur 3 hinzukommen. Zunächst zeigt Kevin auf die beiden blauen Kreise links oben und unten in der Figur 3, fügt allerdings hinzu, dass es auch zwei andere der blauen Kreise sein könnten. Dabei zeigt er auf die mittleren blauen Kreise oben und unten. Gleichzeitig macht der Schüler die Bemerkung „Ist ja eigentlich egal“. Zusammen mit seinem Vorgehen beim Abzählen der Kreise deutet dies darauf hin, dass die innere Struktur einer Figur bzw. ein Muster im Bildungsprozess der Figurenfolge aus seiner Sicht unwichtig sind. Es kann auch sein, dass das Kind meint, es sei egal, wo der Einschub passiert. Anscheinend ist Kevin in diesem Kontext lediglich an einem quantitativen Aspekt interessiert.

Im nächsten Schritt erstellt Kevin die Formel für die Anzahl der blauen Kreise, wendet diese auf die Figuren 7 und 50 an und verkündet, wie er die Gesamtzahl der Kreise zu bestimmen gedenkt. Dies alles geschieht in einem pausenlosen Wortbeitrag:

> 30 K Und die Gesetzmäßigkeit ist n mal zwei plus zwei (*schreibt* $n \cdot 2 + 2$ *in die* n*-Spalte*). Und wenn man das dann damit ausrechnet, also sieben mal zwei sind vierzehn, plus zwei sind dann sechzehn. Und dann (*schaut in die 50-Spalte*) sind dann hundert, sind dann hundertzwei. Und jetzt brauch ich die ja hier nur noch (*zeigt immer in einer Zeile auf die erste und die zweite Spalte*) zusammenrechnen.

Somit hat der Schüler seine zu Beginn der Aufgabenbearbeitung geäußerte Vorstellung, was die n-Spalte von ihm eigentlich verlangt, nämlich eine Gesetzmäßigkeit mit einem Term allgemein zu erfassen und in den nächsten Spalten mit konkreten Zahlenwerten anzuwenden, realisiert. Dies wird dadurch sichtbar, dass er den Wert 16 für die Anzahl der blauen Kreise von Figur 7 „damit“ (vgl. Transkriptzeile 30), also durch das Einsetzen eines konkreten Zahlenwertes in seine Formel, ausrechnet. Auch bei der Figur 50 benennt Kevin die Zwischenergebnisse, wodurch der Eindruck bekräftigt wird, dass der Schüler verinnerlicht hat, sowohl eine erkannte Regelmäßigkeit mit Einbeziehung einer Variablen in Form eines Term zu verallgemeinern, als auch die Tatsache, dass man für diese Variable jede beliebige Zahl einsetzen kann mit dem Ziel, diese aufgestellte Formel für die schnelle und ökonomische Anzahlbestimmung auch bei hohen Figurennummern zu nutzen.

Die Aufforderung, den Ursprung seiner Formel an der konkret gegebenen Figur 3 zu erklären, versteht Kevin dahingehend, dass er seine Formel bei der Figur 3 durch Anwendung überprüfen soll:

> 32 K Also, wenn ich jetzt hier die blauen Kreise noch nicht wüsste und die rauskriegen möchte, dann rechne ich die drei, also das n steht ja für jede beliebige Anzahl der Figur, dann ist die 3 das n und zwei mal die drei sind dann sechs und plus zwei sind dann acht und dann hat man die Anzahl der blauen Kreise.

Damit erläutert Kevin, dass man durch entsprechendes Einsetzen für n in seiner Formel auf die entsprechende Anzahl der blauen Kreise kommen könnte, jedoch gibt er keine Erklärung dafür, wie er auf die Formel gekommen ist. Denkbar ist, dass der Schüler durch Hantieren mit den Zahlenwerten auf die Formel kam. Seine Erfahrungen mit ähnlichen Aufgaben aus den Unterrichtsaktivitäten könnten ihm gezeigt haben, wie Terme in Aufgaben dieser Art aussehen, und davon ausgehend hätte Kevin durch einfaches Ausprobieren auf die passende Form stoßen können. Mit Sicherheit lässt sich dies allerdings nicht feststellen, da der Schüler sich dazu nicht äußert. Es kann auch sein, dass Kevin einen gut ausgeprägten Zahlensinn hat und die Formel aus den Anfängen der Zahlenfolgen „abliest“. Er weist jedoch weder auf ein spezielles Bauprinzip der Figurenfolge hin, noch bringt die Figuren in Verbindung mit seiner Formel.

Episode 3: Kevin bestimmt die Gesamtanzahl der Kreise

Zu Beginn der Episode 3 erläutert Kevin – wie schon in den Episoden zuvor – in welchen Lösungsschritten er vorzugehen beabsichtigt:

34 K Und wenn ich jetzt, jetzt ist ja nach den Gesamtkreisen gefragt und da brauch ich die ja eigentlich alle nur zu addieren. Und die Formel rausfinden kann ich dann ja nachher machen.

Er setzt sein Vorhaben um, indem er die Gesamtzahl für die gegebenen konkreten Zahlenwerte der Figurennummer errechnet und für jede Figur die Zahlen der schon ausgefüllten oberen Zeilen addiert. Damit bemerkt Kevin, dass er nicht erneut nach einer Gesetzmäßigkeit suchen muss, sondern seine zuvor errechneten Ergebnisse benutzen kann. Diesmal lässt der Schüler bewusst die n-Spalte aus, um sich später mit dieser zu befassen. Im nachstehenden Ausschnitt aus dem Interviewtranskript gibt Kevin eine ausführliche Erläuterung seines Vorgehens:

36 K (*Schreibt nacheinander die Gesamtanzahl der Kreise in die Spalten 1 bis 4 sowie 7 und 50, lässt dabei die n-Spalte aus.*) *So, dafür (sieht auf die n-Spalte)* die Formel ist dann jetzt (*8 Sek. Pause*) n mal, n mal drei plus zwei. Also, jetzt kann man die Formel, die kann man ja auch sozusagen addieren. Also zwei plus eins und die zwei bleibt dann einfach stehen; n mal drei plus zwei (*schreibt* $n \cdot 3 + 2$). Das kann man dann jetzt hier mal mit der dritten machen. Wenn man dann, drei mal drei sind neun, plus zwei sind dann elf.

Diese detaillierte Beschreibung des eigenen Vorgehens lässt darauf schließen, dass Kevin seine Strategie des Addierens von konkreten Zahlen auf algebraische Terme überträgt und Formeln, die eine Variable enthalten, genau so behandelt wie die Zahlenausdrücke. Gleichwohl erklärt er hierzu: „jetzt kann man die Formel, die kann man ja auch sozusagen addieren“ (vgl. Transkriptzeile 36). Das Wort „sozusagen“ in dieser Äußerung zeigt, dass der Schüler einen substantiellen Unterschied zwischen einer Zahl und einem algebraischen Term, der eine Variable enthält, wahrnimmt. Dennoch kann man erkennen, dass Kevin mit Variablen souverän umgeht, wie auch mit Zahlen selbst. Die Tatsache, dass Kevin in der Episode 1 die Anzahl der gelben Kreise durch den Ausdruck $n \cdot 1$ erfasst, hat ihm möglicherweise die Addition der beiden Terme $n \cdot 1$ und $n \cdot 2 + 2$ erleichtert. Seine Vorgehensweise zeigt, dass Kevin von dem Verb „addieren" Gebrauch macht, indem er in den beiden Termen zunächst die variablen Teile betrachtet und die Faktoren 1 und 2 addiert. Anschließend wird der Summand 2 aus dem zweiten Term $n \cdot 2 + 2$ in die neue Formel übernommen. Er verbalisiert sein Handeln durch „zwei plus eins und die zwei bleibt dann einfach stehen" (Transkriptzeile 36) und verschriftlicht sein Ergebnis im Term $n \cdot 3 + 2$. Sogleich demonstriert Kevin – unklar, ob für sich selbst oder für die Interviewerin – die Richtigkeit seiner mittels der Addition von zwei Termen entstandenen Formel durch ein Zahlenbeispiel: Er berechnet die Gesamtanzahl der Kreise für die Figurennummer 3, indem er der Variablen n den Wert 3 verleiht und feststellt, dass das Ergebnis 11 mit der als Summe von 3 und 8 entstandenen Zahl 11 übereinstimmt. Mit diesem letzten Schritt ist die Aufgabe für Kevin komplett erledigt.

Episode 4: Kevin reflektiert über die Unterrichtsaktivitäten

Seinen raschen Erfolg bei der Lösung der Aufgabe KREISE erklärt der Schüler wie folgt:

38	K	Ja, das haben wir auch schon ziemlich oft so in der Schule gemacht, so ähnliche Arbeitsblätter.

Damit gibt Kevin zu verstehen, dass er die Gemeinsamkeit zwischen der Aufgabe KREISE und den mehrfach erprobten Aufgaben aus den Unterrichtsaktivitäten erkannt und angewandt hat. Er formuliert seine Erkenntnis auf die Nachfrage der Interviewerin, ob die Aufgaben aus den Arbeitsblättern schwierig waren:

44	K	Ja, also manche waren schon etwas kniffelig, aber ging eigentlich, es war ja dasselbe Prinzip.

Gesamtschau: Charakteristika von Kevins Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe KREISE

Zu Beginn der Interviewsequenz nummeriert Kevin die abgebildeten Figuren durch und verkündet gleich darauf – noch vor Beginn der eigentlichen Bearbeitung der

Aufgabe – einen Arbeitsplan, anhand dessen er auf eine Gesetzmäßigkeit in der n-Spalte hinarbeiten möchte, um diese anschließend auf die höheren Zahlenwerte anzuwenden. Die von ihm eingenommene Rahmung kann somit als *Struktur-Rahmung* bezeichnet werden. Er erkennt eine Gesetzmäßigkeit für die Anzahl der blauen Kreise auf Grundlage der Zahlenfolge der zweiten Zeile der Tabelle und erstellt einen Term. Diesen Term wendet er entsprechend auf die höheren Zahlen an, setzt damit seinen Arbeitsplan um. Bei der Berechnung der Gesamtanzahl der Kreise überträgt Kevin sein Additionsverfahren bei den Zahleneinträgen auch auf die Terme und führt eine Zusammenfassung von zwei Termen zu einem dritten durch. Die Art seiner Argumentation kann somit als *algebraisch* eingeordnet werden.

Kevins gesamte Herangehensweise lässt darauf schließen, dass er bei seinen Überlegungen schnell von der Bildfolge der Kreise zur Zahlenfolge wechselt und ausschließlich anhand dieser argumentiert. Er erwähnt dabei keine spezielle Verbindung zu der inneren Struktur einzelner Figuren bzw. zum Aufbauprinzip der Figurenfolge. Kevin kann das erkannte Muster strukturell beschreiben und ist auch in der Lage, dieses mit algebraischen Mitteln formal darzustellen. Hervorzuheben ist der explizite Hinweis Kevins auf das der gesamten Aufgabenserie zugrunde liegende Prinzip. Dieses Prinzip setzt im Interview I ein, durchzieht alle Arbeitsblätter der Unterrichtsaktivitäten und findet sich auch in der ersten Aufgabe KREISE des Interviews II wieder.

4.1.1.2 Laura

Das gesamte Interview mit Laura umfasste ca. 34 Minuten, davon nahm die erste Aufgabe KREISE ca. 11 Minuten in Anspruch. Die Abbildungen 4.3 zeigt die schriftlich festgehaltenen Arbeitsergebnisse von Laura.

Die Interviewsequenz mit der Bearbeitung der Aufgabe KREISE lässt sich in vier Episoden einteilen. In den ersten drei Episoden bearbeitet Laura die drei Tabellenzeilen: in Episode 1 (Zeilen 1–18) ermittelt Laura konkrete Anzahlen und einen Term für die gelben Kreise, in Episode 2 (Zeilen 19–34) ermittelt sie konkrete Anzahlen und einen Term für die blauen Kreise und in Episode 3 (Zeilen 35–49) ermittelt Laura die Gesamtanzahlen der Kreise. In Episode 4 (Zeilen 50–80) erstellt Laura einen Term, der sich aus den Termen für die gelben und blauen Kreise zusammensetzt.

Figurennummer	1	2	3	4	...	n	...	7	...	50
Anzahl der gelben Kreise	1	2	3	4		n+0		7		50
Anzahl der blauen Kreise	4	6	8	10		n·2+2		16		102
Anzahl der Kreise insgesamt	5	8	11	14		n·3+2		23		152

Abbildung 4.3: Aufgabe KREISE: Lauras Lösung

Episode 1: Laura bestimmt die Anzahl der gelben Kreise

Laura beginnt die Bearbeitung der Aufgabe damit, dass sie die abgebildeten Figuren durchnummeriert und die Anzahl der gelben Kreise jeweils in die Tabelle einträgt (Abb. 4.3). In Bezug auf die nicht abgebildete Figur 4 kommt die Schülerin zu dem Ergebnis von 4 gelben Kreisen und argumentiert aus dynamischer Sicht, nämlich, dass von Figur zu Figur jeweils ein gelber Kreis hinzukommt, wie folgt:

9 L ...bei der vierten müssten dann vier gelbe Kreise sein, weil immer einer dazu kommt.

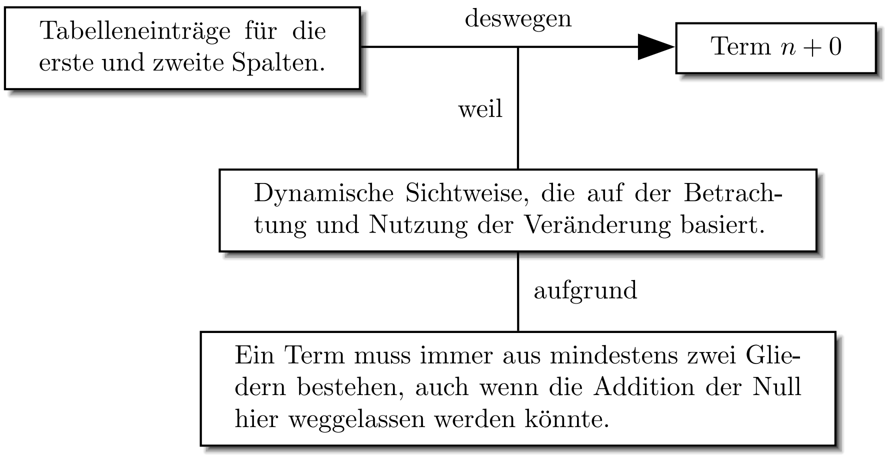
Zudem findet die Schülerin bei der Betrachtung der Figurenfole heraus, dass die Anzahl der gelben Kreise immer identisch mit der Abbildungsnummer ist. Sie trägt die Zahlen 7 und 50 in die Tabelle ein und kommt anschließend erst auf die übersprungene n-Spalte zurück:

15 L Das müsste dann, n ist das, dann n plus Null. Ja. *(schreibt $n + 0$ in die Tabelle)*

16 I Mmh, und warum?

17 L Weil bei der ersten Figur ist nur ein gelber Kreis und bei der zweiten sind es zwei, also n plus Null sozusagen. Das ist immer das gleiche wie da oben steht (*zeigt auf die Figurennummer)*

Der Entstehung des aufgestellten Terms $n + 0$ können unterschiedliche Deutungen zugrunde liegen. Einerseits kann dieser Term aufzeigen, dass zwar ein Veränderungsprozess von Figur zu Figur stattfindet, der jedoch bereits durch die Figurennummer selbst ausreichend beschrieben ist, so dass nichts hinzugefügt werden muss, und dies wird durch den Zusatz „+0“ ausdrücklich betont. Andererseits scheint Laura eine bestimmte Vorstellung von der äußeren Gestalt von Termen zu haben, nämlich, dass ein Term immer aus mehreren Teilen bestehen muss. Dem trägt sie durch den Ausdruck $n + 0$ Rechnung. Mit Toulmin lässt sich folgendes Argument rekonstruieren:



Episode 2: Laura bestimmt die Anzahl der blauen Kreise

Die gesuchten blauen Kreise in den Figuren 1 und 2 zählt Laura im Uhrzeigersinn ab. Bei der Bestimmung der blauen Kreise in Figur 3 geht die Schülerin strukturiert vor, indem sie zunächst die oberen und unteren Kreise jeweils gebündelt abzählt, um anschließend die beiden Kreise an den Enden der Figur zu erfassen. Ihre Zählmethode wird der Interviewerin durch die Gestik der Schülerin sichtbar. Es bleibt dennoch fraglich, ob Laura sich ihrer eigenen Zählweise bewusst wird, weil sie diese weder artikuliert noch im Laufe der weiteren Bearbeitung anwendet.

Aufgrund dessen, dass bei der nicht abgebildeten Figur 4 keine Abzählung mehr möglich ist, bestimmt die Schülerin die Anzahl der blauen Kreise durch die Beobachtung, dass bei jedem Schritt in der Zahlenfolge stets die Zahl 2 hinzukommt. Zur Ermittlung der Anzahlen der Kreise von den Figuren 7 und 50 erstellt die Schülerin eine Formel, die sie aus den bereits ausgefüllten Spalten und den gemachten Beobachtungen ableitet:

25 L Und dann müssten es bei der vierten (..) zehn sein. Ja, dann müssten es zehn sein, weil wenn man jetzt von da *(zeigt auf die Zahlenfolge entlang der gerade ausgefüllten Zeile)* losgeht, dann kommen immer zwei dazu *(schreibt 10 in die Tabelle)* und bei 7 (4 Sek.) da müsste ich jetzt ne Formel finden, damit ich die anderen beiden rauskriege.

Laura bemerkt ein Veränderungsmuster in der Zahlenfolge und benennt das auch. Dieses spielt aber in ihren Überlegungen keine explizite Rolle. Vielmehr versucht sie, „ne Formel“ zu finden, wobei die Formel für sie vermutlich ein Rechenschema ist, das angibt, wie man die Anzahl aus der Figurennummer errechnet. Ein solches Schema gewinnt sie induktiv aus den vorhandenen konkreten Zahlenbeispielen:

31	L	... es könnte n mal zwei plus zwei sein, ja. Das müsste eigentlich gehen, weil n mal zwei, das sind (*zeigt dabei auf die Spalte von Figur 1*) zwei plus zwei sind vier, und dann hier (*zeigt auf die zweite Spalte*) n mal zwei, sind zwei mal zwei sind vier, plus zwei sind sechs.
32	I	Mmh.
33	L	Und das geht bei allen, hier auch (*zeigt auf die dritte und die vierte Spalte*). Zwei mal drei sind sechs, plus zwei sind acht und zwei mal vier sind acht, plus zwei sind zehn; dann muss das n mal zwei plus zwei (*schreibt* $n \cdot 2 + 2$ *in die Tabelle*), dann müssten das hier vierzehn, sechzehn sein (schreibt 16 in die 7er Spalte), bei 50 müssten das hundert, hundertzwei (*schreibt 102 in die 50er Spalte*).

Laura erstellt den Term $n \cdot 2 + 2$ durch Gesetzmäßigkeiten, die sich durch den Vergleich der numerischen Tabelleneinträge ergeben. Wieweit der Aufbau der Figuren dabei eine bewusst oder unbewusst in Betracht gezogene Rolle spielt, lässt sich nicht klären.

Episode 3: Laura bestimmt die Gesamtanzahl der Kreise

Die Kreise in der Figur 1 zählt Laura einfach ab. Die Gesamtanzahl der Kreise für die anderen Figuren bestimmt die Schülerin mit Hilfe der Tabelle, da sie festgestellt hat, dass sich die Gesamtanzahl aus der Summe der beiden ersten Zeilen ergibt. Sie beobachtet somit das Muster „gelb + blau“:

37	L	Mmm, da hab ich jetzt einfach hier (*zeigt auf die Spalte mit den Einträgen 2 und 5*) zusammengezählt, weil das ja hier schon steht.

Hier überspringt Laura allerdings beim Ausfüllen der letzten Zeile der Tabelle die n-Spalte und befasst sich erst zuletzt mit der Aufstellung eines allgemeinen Terms zur Bestimmung der Gesamtanzahl der Kreise. Die einfache Addition der zuvor in den ersten beiden Zeilen aufgestellten Terme war für Laura offensichtlich keine Option. Dies lässt vermuten, dass Laura Terme nicht wie Zahlenausdrücke deutet; die n-Spalte verdient vielmehr gesonderte Behandlung. Hier greift Laura erneut die Vorstellung auf, dass ein Term eine lineare Form annehmen soll und notiert den Term $n \cdot 3 + 2$. Die Aufforderung „Erzähl mal“ (vgl. Transkriptzeile 44) versteht Laura offensichtlich dahingehend, die Richtigkeit ihres Terms an der Tabelle aufzuzeigen. Sie demonstriert dies chronologisch anhand der ersten vier Spalten:

44 I Und jetzt erzähl mal.

45 L Erstmal hier (*hält während ihrer Ausführungen den Daumen der linken Hand auf der Figurennummer in der 1er Spalte*) einmal drei sind drei, plus zwei sind fünf (*zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf den Eintrag 5 in der 1er Spalte*). Zwei mal drei (*hält den Zeigefinger der linken Hand an die Figurennummer der 2er Spalte*) sind sechs (*zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf den Eintrag 6 in der 2er Spalte*), plus zwei sind acht (*zeigt dabei auf die 8 in der 2er Spalte*). Dann, ähm, (*zeigt auf die dritte Spalte*) n mal, also drei mal drei sind neun, plus zwei sind elf, und vier mal drei sind zwölf, plus zwei sind vierzehn.

Als die Interviewerin ihre Frage präzisiert und nach der Entstehung des Terms fragt, legt Laura ihre Überlegungen offen:

46 I Aber wie bist du auf die Idee gekommen, n mal drei zu nehmen? Das wäre interessant, das ist richtig, ja.

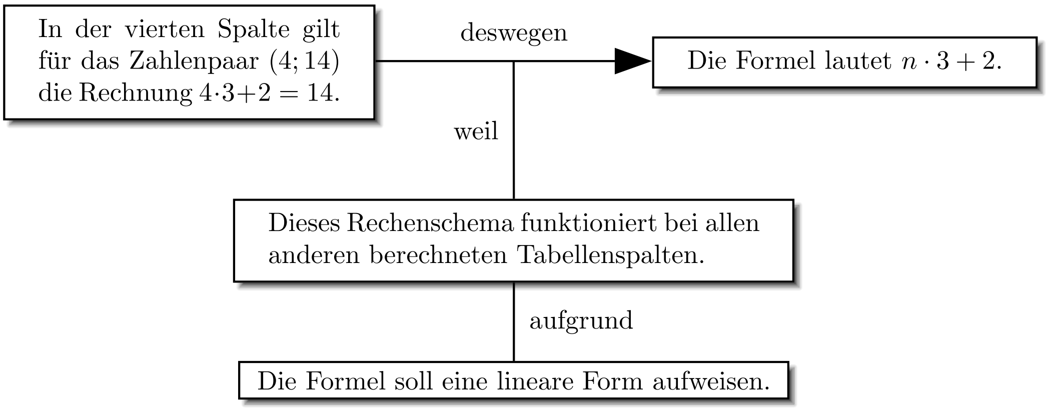
47 L Ja (*zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf die Figurennummer 4 in der 4er Spalte*), ich hab mir die 4 angeguckt und dann und dann hab ich mir ein bisschen überlegt, wie ich mit mal in die Nähe von vierzehn komme. Da hab ich mir überlegt vierzehn geht nicht und dann bin ich auf die zwölf gekommen und das ist dann drei mal vier, und das sind dann zwölf und dann noch mal plus zwei und dann hat man das Ergebnis und dann hab ich's dann einfach bei allen ausprobiert.

Laura versucht hier eine funktionale Verbindung zwischen Figurennummer und dem Folgenglied in der betrachteten Zeile herzustellen. Dabei geht sie anscheinend davon aus, dass die Multiplikation die entscheidende Operation ist („mit mal in die Nähe kommen“) und eventuell noch eine Korrektur durch Addition erforderlich ist. Sie beginnt ihre Suche nach der Formel mit der vierten Spalte und den darin stehenden Zahlenwerten 4 (für Figurennummer) und 14 (Gesamtanzahl der Kreise).

Die folgende Rekonstruktion von Lauras Überlegungen könnte ihr Vorgehen erklären:

- Da 14 relativ groß ist im Vergleich zu 4, ist anzunehmen, dass die Multiplikation die einschlägige Grundoperation ist, mit der man in die Nähe der Teilzahl kommt, also mit „drei mal vier“ erreicht man die 12;
- Die verbleibende Restdistanz von 12 bis 14 wird dann mittels Addition überbrückt.

Die dabei erstellte Formel überprüft Laura an „allen“ anderen Spalten. Mit Toulmin kann dabei folgendes Argument rekonstruiert werden:

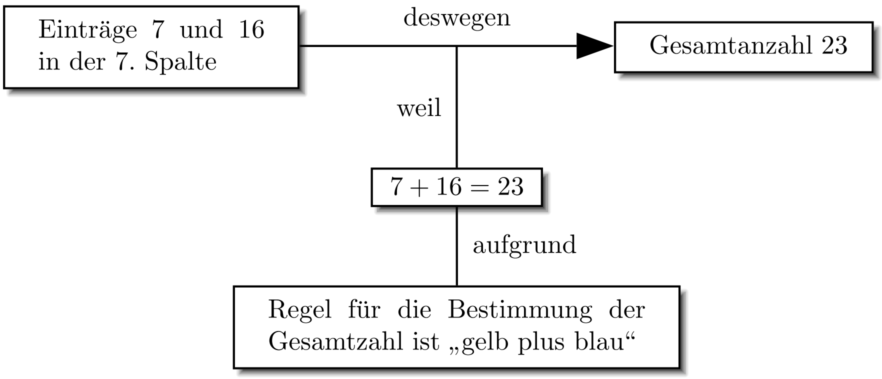


Episode 4: Laura fügt zwei Terme zusammen

Bis zu diesem Zeitpunkt sind Laura alle gestellten Aufgaben und Fragen leicht gefallen. Bei der Erstellung der Formel für die Gesamtanzahl der Kreise geht Laura jedoch – im Gegensatz zu den Termen der ersten beiden Zeilen – anders vor. Dies veranlasst die Interviewerin, der zuvor entstandenen Vermutung, dass Laura Terme anders als Zahlenausdrücke behandelt, nachzugehen:

50	I	Also, du hast hier drei, fünf, acht und vierzehn angeguckt. Schön. Aber falls ich das richtig verstanden hatte, du hast hier fünf rausgefunden, *(zeigt auf die erste Spalte)* indem du eins und vier addiert hast. Acht war die Summe von zwei und sechs, ja? Und dreiundzwanzig, bei 7, hast du auch durch Addition von sieben und sechzehn herausgefunden, stimmts?
51	L	Ja, ich hab das, ähm, gemacht, weil zuerst hab ich das einfach mal zusammengezählt (*tippt abwechselnd mit dem Zeige- und Mittelfinger auf die Einträge 7 und 16 in der 7er Spalte*), weil es kommt dann ja raus, weil es gelb (*zeigt auf die Zahl 7*) und blau (*zeigt auf die Zahl 16*) sind.

Die Interviewerin wendet hier die Spiegel-Methode an, die darin besteht, dass sie den Lösungsweg der Schülerin bei der Ermittlung der Gesamtanzahl der Kreise an konkreten Zahlenbeispielen zusammenfassend paraphrasiert und anschließend die Frage danach stellt, ob sie diesen richtig verstanden habe. Damit wird zunächst eine direkte Frage nach dem Grund des Vorgehens umgangen, um der Schülerin die Gelegenheit zur unvoreingenommenen Äußerung zu geben, ohne ihr ein Gefühl zu vermitteln, etwas falsch gemacht zu haben. Laura bestätigt das von der Interviewerin Gesagte und bekräftigt ihr Additionsvorgehen, indem sie das Muster „gelb plus blau“ aufzeigt. Mit Toulmin lässt sich diese Argumentation wie folgt rekonstruieren:



Erst an dieser Stelle folgt seitens der Interviewerin eine gezielte Frage nach dem abweichenden Vorgehen in der n-Spalte, die die Schülerin zum Nachdenken über die Anwendbarkeit ihrer Additionsmethode bei den konkreten Zahlenbeispielen auf die n-Spalte anregt:

52	I	Natürlich, die Zahlen standen da, also das ist das einfachste, okay. Wie wäre es dann mit n? Weil bei n hast du schon zwei Terme stehen: n plus Null und n mal zwei plus zwei.
53	L	Mmh, soll ich da, soll ich die jetzt irgendwie zusammenfügen oder?

Die Antwort der Schülerin (vgl. Transkriptzeile 53) markiert den Wendepunkt im Interviewgespräch, denn erst jetzt kommen ihre Vorstellungen von Variablen und Ausdrücken mit Variablen nach und nach zum Vorschein. Laura antwortet mit einer Gegenfrage, wodurch sie erneut die Annahme bestätigt, dass ihr der Gedanke an eine Addition der Terme fremd ist. In ihrer Vorstellung lassen sich konkrete Zahlen durch „Zusammenzählen“ (vgl. Transkriptzeile 37, 51) addieren, Terme hingegen können lediglich „irgendwie zusammengefügt“ bzw. „zusammengesetzt“ werden (vgl. Transkriptzeile 53, 55). Die Variable n stellt für Laura keine der

Addition zugängliche Zahl dar, denn bei Zahlen kann die Schülerin mit der Methode des Zusammenzählens operieren.

Die Gegenfrage der Schülerin beantwortet die Interviewerin damit, dass sie diese Frage mittels der Spiegel-Methode zurückgibt und Laura somit mit ihrer eigenen Frage konfrontiert:

54 I Ja, das ist die Frage. Kann man das?

55 L Mmm, wenn man die zusammensetzt, dann kommt da nicht das da (*zeigt auf ihre Formel für die Gesamtanzahl*) raus, sondern das ist eine andere.

Laura meint, dass durch das Zusammensetzen beider Terme $n + 0$ und $n \cdot 2 + 2$ nicht der von ihr selbst zuvor aufgestellte Term für die Gesamtanzahl der Kreise $n \cdot 3 + 2$ „herauskommt". Auf die Bitte der Interviewerin, dieses Zusammenfügen schriftlich festzuhalten, stellt Laura einen von dem Term für die Gesamtanzahl der Kreise abweichenden Term auf. Dieser Term soll ihre Vorstellung des Musters „gelb plus blau" wiedergeben (Abb. 4.4).

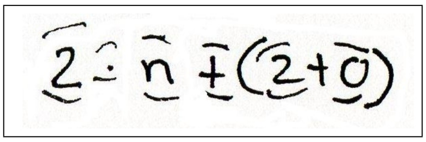


Abbildung 4.4: Laura fügt zwei Terme zusammen

Das n in beiden Termen deutet Laura von Anfang an als Figurennummer. Daraus schließt sie, dass das n in dem Ergebnis des Zusammenfügens ein und dieselbe Zahl für eine Figur repräsentiert und gleichzeitig sowohl für die gelben als auch für die blauen Kreise als Figurennummer steht, da es um dieselbe Figur geht. Folglich reicht es aus Lauras Sicht aus, die Variable n in der Rolle der Figurennummer nur ein Mal in dem Endterm auftauchen zu lassen. Dies erläutert sie mit Hilfe der farblichen Markierung einzelner Zeichen in ihrem Endterm (vgl. Transkriptzeilen 75-77).

71 L Ja, also zwei mal n, das ist ja sozusagen die Grundlage, dass man die Anzahl der blauen Kreise rauskriegt und ähm dann muss man ja eigentlich noch

72 I Was meinst du damit?

73 L Ja, dass man die blauen Kreise erst mal rauskriegt und dann in Klammern plus zwei, das gehört nämlich auch noch zu diesem hier (*zeigt auf den Term $n \cdot 2 + 2$ für die blauen Kreise*) und dann muss man versuchen, die Anzahl

		der gelben Kreise rauszukriegen. Und dann müsste man die einfach noch dazu, hab ich so überlegt (..)
74	I	Kannst du vielleicht mit Farben so markieren, was zu den blauen Kreisen gehört? *(gibt L einen roten und einen grünen Stift)*
75	L	Also, dann nehme ich jetzt mal grün. Das hier (*zeigt auf ihren Term unter der Tabelle und setzt über und unter die Zahl 2 in der Klammer sowie die 2 vor dem Malzeichen und dem n jeweils einen grünen Strich*). Soll ich auch das Malzeichen
76	I	Aha, okay.
77	L	(*Setzt über und unter das Malzeichen je einen grünen Strich*) und zur Hälfte auch das (*unterstreicht das n mit grün*), aber das gehört dann eigentlich auch zu dem anderen (*setzt über das n einen roten Strich; dann zwei rote Striche um das Pluszeichen und um die Zahl 0*). Okay, jetzt hatte ich überlegt, die so zu verbinden.
78	I	Wow, okay. Und das ist die Summe von n plus Null und n mal zwei plus zwei?
79	L	Ja, aber eigentlich kommt dann das Gleiche wie bei der Anzahl der blauen Kreise raus, weil hier ist es n plus Null.

Hier wird erkennbar, dass Laura sich in einem Konflikt befindet. Einerseits hat sie die Vorstellung, die Terme $n + 0$ und $n \cdot 2 + 2$ zusammen zu fügen bedeute so etwas wie „längs n verkleben“, andererseits merkt sie, dass ihr Ergebnis $2 \cdot n + (2+0)$ nicht recht passt.

Besonders wichtig für das Verstehen von Lauras Deutungen ist hierbei die Argumentation der Schülerin „weil hier ist es n plus Null“ (vgl. Transkriptzeile 79). Damit wird die oben entwickelte Interpretation von Lauras Überlegungen bestätigt, dass die konkreten Zahlen addiert, die Variablen jedoch „verklebt“ werden.

Gesamtschau: Charakteristika von Lauras Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe KREISE

Am Anfang ihrer Beobachtungen betrachtet Laura die Figurenfolge und macht ihre ersten Einträge in die vorgegebene Tabelle. Für weitergehende Beobachtungen und Erkenntnisse nutzt Laura ausschließlich die Tabelleneinträge und die darin von ihr erkannten Gesetzmäßigkeiten. Sie nimmt eine *Struktur-Rahmung* an, indem sie versucht auf eine Regel hinzuarbeiten. Die Art ihrer Argumentation kann dabei als *arithmetisch-strukturell* bezeichnet werden, da Laura sich ausschließlich auf die

Zahlen in der Tabelle konzentriert und an diesen Gesetzmäßigkeiten aufspürt und überprüft. Das Bauprinzip der Figurenfolge wird nicht als Stütze verwendet.

Es gelingt Laura, die geforderten symbolischen Ausdrücke für die drei Tabellenzeilen aufzustellen. Der Term für die Gesamtanzahl der Kreise kommt jedoch – wie sich erst auf gezielte Nachfrage herausstellt – nicht durch die bei allen anderen Spalten der Tabelle angewandten Additionsverfahren zustande. Vielmehr scheint es, dass sie an einem konkreten Beispiel durch eine gezielte Strategie einen hypothetischen Term generiert, dessen Richtigkeit sie dann weiter überprüft. Bei der Aufgabe, eine Operation in Form der Addition der beiden ersten Terme durchzuführen, zeigen sich jedoch Schwierigkeiten. Für Laura werden Terme im Gegensatz zu Zahlen nicht addiert, sondern zusammengefügt. Das geschieht durch einen Vorgang des Überblendens oder Verklebens der Symbolsequenzen. Enthält einer der Summanden bereits die Variable n, besteht für Laura kein Anlass, das n des anderen Summanden im Endterm zusätzlich zu berücksichtigen.

Laura ist demnach in der Lage, die Muster zu erkennen und symbolisch zu beschreiben, die Operationen mit symbolischen Ausdrücken stellten für sie jedoch noch eine Hürde dar.

4.1.1.3 Michael

Das gesamte Interview mit Michael umfasste 52 Minuten. Michaels Interviewsequenz zur Bearbeitung der Aufgabe KREISE nahm 22 Minuten in Anspruch und kann in drei Episoden eingeteilt werden, wobei jede Episode die Bearbeitung einer Tabellenzeile umfasst.

In Episode 1 (Transkriptzeilen 1–38) bestimmt Michael die Anzahl der gelben, in Episode 2 (Transkriptzeilen 39–104) die Anzahl der blauen und in Episode 3 (Transkriptzeilen 105–149) die Anzahl der Kreise insgesamt.

Episode 1: Michael bestimmt die Anzahl der gelben Kreise

Michael beginnt damit, die Anzahl der gelben Kreise bei den abgebildeten Figuren zu bestimmen. Die jeweilige Anzahl kann er sofort an den Bildern ablesen und trägt diese in die Tabelle ein (Abb. 4.5). Figur 4 ist nicht mehr auf dem Arbeitsblatt vorhanden, dennoch weiß Michael, dass in dieser Figur vier gelbe Kreise zu sehen sein müssten. Die Spalte mit der Figurennummer n lässt er zunächst aus, da er in ihr vermutlich einen höheren Schwierigkeitsgrad erwartet:

Figurennummer	1	2	3	4	...	n	...	7	...	50
Anzahl der gelben Kreise	1	2	3	4		n +0		7		50
Anzahl der blauen Kreise	4	6	8	10		n · 2+2		16		~~86~~ 102
Anzahl der Kreise insgesamt	5	8	11	14		n-2+2 ~~n+n+2~~		23		152

Abbildung 4.5: Aufgabe KREISE: Michaels Lösung

2 M ... Das (*zeigt auf die n-Spalte*) lass ich erstmal.

Sein Vorgehen überträgt Michael auf die nicht abgebildeten Figuren 7 und 50 und notiert jeweils die Anzahlen 7 und 50. Ihm ist anscheinend klar, dass die Figurennummer und die Anzahl der gelben Kreise an jeder Figur identisch sind. Er kann es jedoch nicht auf einer begrifflichen Ebene explizit machen und symbolisch formulieren, somit stellt die n-Spalte eine Hürde für ihn dar.

3 I Mmh, und was würde dann bei n stehen?
4 M Bei n, äh (...) nachdenken.

Nach dem Vorschlag der Interviewerin betrachtet Michael die von ihm erzeugte Zahlenfolge und bemerkt die Regel, dass jede Figur der Folge einen gelben Kreis mehr enthält als die vorherige Figur. Er zieht den Schluss:

8 M Zwei und dann drei, dann kann man eigentlich n plus 1 nehmen.

An dieser Stelle bittet die Interviewerin Michael, seine Gedankengänge näher zu erläutern und zu erklären, wofür n eigentlich steht. Es fällt Michael offensichtlich schwer, eine verständliche Formulierung zu finden:

20 M Ja, dann ist n vielleicht, ach, wie kann man das erklären?
21 I Erklär wie du möchtest, mit deinen eigenen Worten.
22 M Also, sämtliche Zahlen, dann was dazu rechnen. Also, das soll jetzt ungefähr heißen das n, also das n ist jetzt irgendeine Zahl, zum Beispiel 4 und dann rechnet man da irgendwas zu.

Somit deutet Michael das Symbol n als Stellvertreter für sämtliche (natürliche) Zahlen und liefert zur Veranschaulichung mit der 4 ein Zahlenbeispiel. Ferner ist er davon überzeugt, dass man zu n „irgendwas“ dazu rechnen muss. Wie kommt er auf diese Idee? Es liegt die Vermutung nahe, dass diese Vorstellung, dass n alleinstehend keinen Term darstellen kann, durch die Unterrichtsaktivitäten hervorgerufen wurde (sowohl Kevin als auch Laura bringen in das Interview II dieselbe Vorprägung mit). Die Interviewaufgabe KREISE weist nämlich dasselbe Aufgabenformat wie die meisten der Arbeitsblätter auf. Da das Ausfüllen der n-Spalte Michael offensichtlich noch Schwierigkeiten zu bereiten scheint, versucht er sich daran zu erinnern, was im Unterricht an einer vergleichbaren Stelle in der Tabelle gestanden hatte. Vermutlich hatte sich der Schüler eingeprägt, dass bei der n- Spalte eine Formel, ein linearer Term zur Beschreibung des Entstehungsprinzips der Folge gefunden werden soll. Diese Überzeugung ist für Michael zu diesem Zeitpunkt stärker als seine eigene Erkenntnis, dass die Figurennummer mit der Anzahl der gelben Kreise übereinstimmt.

Im weiteren Verlauf des Gesprächs bemerkt Michael jedoch, dass er von der Figurennummer auf die Anzahl ihrer gelben Kreise schließen kann, verallgemeinert das Erkannte mit Hilfe von Variablen und liefert dazu ein konkretes Zahlenbeispiel:

26	M	Ja, da rechnet man eigentlich n plus Null. Weil dann hat man ja die 4, das ist ja Figur 4 und dann auch vier gelbe Kreise, dann rechnet man bei der Figur 4 eigentlich gar nicht mehr dazu.

Dadurch, dass Michael an dem vorherigen Gedankengang, etwas zu addieren, immer noch festhält, konstruiert er den Term $n+0$ und trägt diesen in die Tabelle ein. Bemerkenswert ist die souveräne Argumentation des Schülers auf die Frage der Interviewerin nach dem Grund für den Eintrag „plus Null“ in dem Term. Für Michael ist dies eine Verdeutlichung dessen, dass die Zahl – auch in der Allgemeindarstellung – unverändert bleibt:

35	I	Und wieso hast du jetzt plus Null geschrieben?
36	M	Weil die Zahl, jetzt 4, da rechnet, da sind ja gar keine anderen Zahlen dazu gezählt.
37	I	Aha, also deswegen plus Null.
38	M	Das ist genau das Gleiche.

Mit der Addition von n und Null erreicht er einerseits die aus seiner Sicht erforderliche Form eines Terms, andererseits verändert die Addition mit Null den Wert von n nicht. Erkannt hat Michael dies anhand von konkreten Zahlen und ist offenbar in der Lage, den Einzelfall als Prototyp für den allgemeinen Fall – „jetzt 4“ – zu sehen und in seine Argumentation einzubringen.

Episode 2: Michael bestimmt die Anzahl der blauen Kreise

In der Episode 2 bearbeitet Michael die Frage nach der Anzahl der blauen Kreise. Er beginnt, die entsprechende Zeile der Tabelle auszufüllen, indem er anfangs die blauen Kreise anhand der bildlichen Darstellung nacheinander abzählt und dann bis zur vierten Figur die Felder zügig und richtig ausfüllt. Dass Michael zunächst eine einfache unstrukturierte Abzählstrategie verwendet, wird daran deutlich, dass er – auf die Aufforderung der Interviewerin hin, die Zahl acht aufzuzeigen – sofort mit dem lauten Abzählen der blauen Kreise in der Figur 3 beginnt. Dabei wechselt Michael allerdings an dieser Stelle seine Zählstrategie, indem er die blauen Kreise an der Figur nicht mehr einzeln, sondern gebündelt betrachtet. Er gliedert die blauen Kreise in eine obere und eine untere Dreierreihe sowie in zwei Kreise an den Enden der Figur:

42	M	Eins, zwei, drei, vier (*zählt die blauen Kreise einzeln ab*) also drei (*zeigt die obere Dreierreihe entlang*) plus drei (*zeigt auf die untere Dreierreihe*) sind sechs und zwei dazu (*zeigt auf die beiden Kreise an den Seiten*) sind acht.

Offensichtlich erkennt Michael schon eine gewisse Symmetrie in den Figuren. Er sieht, dass die Anzahl der blauen Kreise oberhalb und unterhalb der gelben Kreise gleich ist. Dies wird daran deutlich, dass er nur die oberen blauen Kreise einzeln abzählt.

Bis zur dritten Figur war es Michael möglich, die Anzahl der blauen Kreise durch Ablesen an der bildlichen Darstellung zu bestimmen. Bei der nicht abgebildeten vierten Figur ist dies nicht möglich. Ohne langes Überlegen kommt der Schüler zu dem Ergebnis von 10 blauen Kreisen, mit der Begründung, dass die Zahlenfolge in der Tabelle bzw. die Anzahl der blauen Kreise sich bei einer Figurennummer zu der Nächstfolgenden immer um zwei erhöhen würde:

46	M	Also, das ist hier immer plus zwei (*zeigt auf die Zahlenreihe*). Bei der ersten sind vier, und dann sechs und dann acht.

Die Spalte mit der Variable n lässt Michael kommentarlos aus und beschäftigt sich mit der Spalte 7. Anzumerken ist hierbei, dass er seine für die dritte Figur vermutlich unbewusst verwendete Strukturierung, hinter der ein auf die anderen Figuren übertragbares Bauprinzip steht, nicht mehr nutzt. Statt dessen wendet Michael eine neue, bei dem Übergang zur vierten Figur gewonnene Vorgehensweise an. Mit dieser können die blauen Kreise dadurch ermittel werden, dass man von

Figur zu Figur jeweils die Zahl zwei addiert. Um die Spalte 7 zu berechnen, vervollständigt er im Kopf diese Zweierreihe durch das schrittweise Hinzufügen von 2 und argumentiert wie folgt:

> 50 M Wenn man sich das dann im Kopf mal so denkt, bei der 5 sind dann zwölf, bei der 6 sind dann vierzehn und bei der 7 sind es dann sechzehn.

Als Nächstes macht sich Michael daran, die Anzahl der blauen Kreise der Figur 50 zu ermitteln, wobei er selbst merkt, dass sein schrittweises Vorgehen hier schwieriger und zeitaufwändiger ist. Das Angebot der Interviewerin, seine Rechnung aufzuschreiben, lehnt er ab und macht deutlich, dass er seine Rechnungen „lieber immer im Kopf“ anstellt. Der Schüler fängt gar nicht erst an, bis fünfzig hoch zu zählen und bei jedem Schritt zwei hinzuzufügen, sondern versucht, sich der Zahl 50 anzunähern. Dies will er dadurch erreichen, dass er zunächst die Differenz aus 50 und 7 berechnet. Dabei stellt er fest, dass:

> 62 M Zwischen sieben und fünfzig (*zeigt auf die beiden Figurennummern*) fehlen dreiundvierzig.

Diese Differenz multipliziert Michael dann „mal zwei“ und kommt dann in der Spalte 50 zu dem Ergebnis 86. Obwohl er seinen Recheneinsatz $50 - 7 = 43$ und $43 \cdot 2 = 86$ der Interviewerin zuliebe schrifltich festhält (Abb. 4.6), bedenkt er nicht, dass er damit nur einen Teil – nämlich eine Veränderung von der Figur 7 bis zur Figur 50 – berechnet hat. Die Anzahl der blauen Kreise bis zur Figurnummer 7, über die er ja schon Kenntnis hat, lässt er dabei außer Acht. Der Schüler meint, dass seine Rechnung nach der ausgeführten Multiplikation von 43 und 2 abgeschlossen sei und notiert sein Ergebnis in die Tabelle. Dies könnte einerseits daran liegen, dass die fünfzigste Figur in der Figurenfolge nicht mehr abgebildet ist, andererseits ist die fünfzigste Zahl der Zahlenfolge (blaue Kreise) nicht mehr so greifbar nah wie die siebte. Zwar hat Michael für die Anzahlbestimmung eine Strategie entwickelt, doch steht die fünfzigste Zahl so weit in der Zahlenfolge, dass das Ergebnis im Gegensatz zur siebten Zahl der Zahlenfolge nicht leicht überprüfbar scheint.

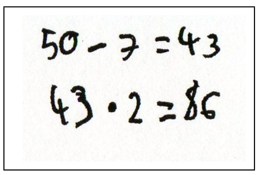


Abbildung 4.6: Michaels Eintrag im Interviewbogen zur Aufgabe KREISE

Da Michael die von ihm in die Tabelle eingetragene Zahl 86 für die richtige Lösung hält, wendet er sich somit der nächsten Fragestellung zu.

Die n-Spalte stellt für Michael zunächst ein Hindernis dar, welches er auch verbalisiert:

72 M Bei n kann man dann zum Beispiel rechnen (..), oh wie soll man das denn machen?

Michaels Problem liegt hier wahrscheinlich darin, dass das Symbol n keinen konkreten Wert besitzt und für ihn dadurch numerisch nicht greifbar ist. Dieser Buchstabe lässt sich nicht in eine Reihe mit anderen Zahlen einordnen. Somit ist das Operieren – in Michaels Terminologie „rechnen" – mit n für Michael nicht durchführbar. Erst nach dem Vorschlag der Interviewerin, an dieser Stelle eine allgemeine Regel zu formulieren, begibt sich Michael auf die Suche nach einer allgemeinen Regel in Form eines Terms mit der Variable n. Methodisch geht er dabei wie folgt vor: Er betrachtet zunächst die beiden Einträge der einzelnen Spalten, indem er auf die beiden Zeilen der ersten, dann auf die Zeilen der zweiten und anschließend auf die Zeilen der dritten Spalte zeigt. Hier wird die Möglichkeit geprüft, stets eine bestimmte Zahl zu der Anzahl der gelben Kreise zu addieren, um die Anzahl der blauen Kreise zu erhalten:

76 M Also, ich rechne gerade, also versuch ich zumindest, dass man bei allen Zahlen irgendeine (5 Sek. Pause) eine Zahl, die man auf das n rechnen kann, dass dann das bestimmte immer rauskommt.

Nach einigem Ausprobieren merkt Michael, dass „es überhaupt nicht geht" und er mit Hilfe seiner Überlegung keine allgemeingültige Formel finden kann, da die zu addierende Zahl bei jeder Figur entgegen seiner Erwartung (vgl. Transkriptzeile 76) immer eine andere wäre. Aufgrund dessen verwirft Michael diesen Lösungsansatz und wendet sich einer anderen Überlegung zu. Er geht noch einmal seine anfänglich eingetragenen Ergebnisse für die Anzahl der blauen Kreise bei den Figuren 1 bis 3 durch und sucht nach Regelmäßigkeiten in dieser Zahlenfolge, die er auf die formale Darstellung übertragen könnte:

82 M Man könnte rechnen n mal zwei plus zwei. Weil bei der ersten, wenn man da zwei plus zwei rechnet, einmal zwei sind ja zwei, dann hat man da zwei raus, und dann plus zwei sind vier, und das geht hier auch, hat man hier auch vier, und plus zwei sind dann sechs und da? (*zeigt auf die 3er Spalte*) hab ich gar nicht geguckt, sind sechs, ja das geht wieder auch.

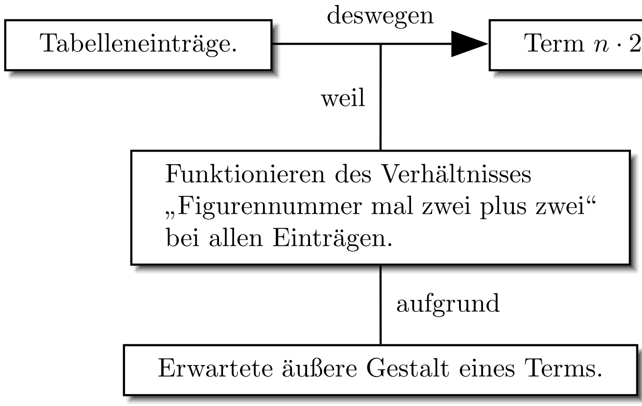
An dieser Stelle gelingt es Michael, die Beschreibung der gewonnenen Erkenntnisse mittels der Formelsprache darzustellen. Bei seinen Erläuterungen zeigt er abwechselnd auf die entsprechenden Zahlen in der Zeile für die jeweilige Figurennummer bzw. auf die Zahlen in der Zeile für die Anzahl der gelben Kreise. Michael trägt die allgemeine Formel für die Anzahl der blauen Kreise in die Tabelle ein und überprüft – auf das Angebot der Interviewerin hin – deren Gültigkeit anhand von bereits eingetragenen Ergebnissen für die Figuren 7 und 50:

85	I	Mmh (..), klappt das auch bei 7, wenn wir das so rechnen? Probier es mal aus.
86	M	Ja, sieben mal zwei sind vierzehn, plus zwei sind sechzehn. Bei der 50 kann man ja rechnen, fünfzig. Ah, das ist falsch (zeigt auf die 86), weil fünfzig mal zwei sind hundert, plus zwei sind dann hundertzwei, dann müsste da eigentlich hundertzwei rauskommen.

Auf diese Weise stellt Michael zum einen fest, dass die Regel $n \cdot 2 + 2$ bei der 7 funktioniert, zum anderen steht er plötzlich vor dem Problem, dass das Ergebnis seiner Formel bei der Figur 50 nicht mehr mit dem Ergebnis seiner eingetragenen Lösung übereinstimmt. Auf Nachfrage der Interviewerin, für welche der beiden Zahlen – 86 oder 102 – er sich entscheiden würde, wählt Michael die 102. Er ersetzt die Zahl 86 in der Tabelle durch die neue Lösung, da er sich auf die selbst erstellte Formel verlässt. Hierbei ist zu bemerken, dass Michael von seiner Formel anscheinend nicht deswegen überzeugt ist, weil er sich auf die inhärente Struktur der Figurenfolge stützt. Vielmehr nimmt er, von der Richtigkeit seiner Regel bei den ersten Zahlen der Zahlenfolge ausgehend, die Richtigkeit der Regel auch im Allgemeinfall an. Dabei argumentiert Michael wie folgt:

92	M	Ich würde mich eigentlich eher auf die hundertzwei, für die hundertzwei entscheiden, weil vor der 50, also überall klappt das bisher mit der n mal zwei plus zwei.

Mit Toulmin wird dabei folgendes Argument denkbar:



Die Fehlersuche bei dem ursprünglichen Ergebnis 86 in der Spalte 50 fällt Michael sichtlich schwer. Durch einen Vergleich mit der Zahl 16 in der siebten Spalte erkennt er jedoch, dass er bei Figurennummer 50 einen Vorgehenswechsel vollzogen hat. Er stellt somit seine erste Methode der Anzahlbestimmung der blauen Kreise, bei der er zunächst die Anzahl der Schritte vom 7. bis zum 50. Folgenglied ausrechnet und diese anschließend mit zwei multipliziert, in Frage. Mit Hilfe des Beispiels zeigt Michael, dass diese Strategie zu keinem richtigen Ergebnis führen kann, indem er seine für die Spalte 50 angewandte Rechenmethode an der Spalte 7 überprüft. Er bestimmt die Differenz $7 - 4$ und multipliziert – da er schon weiß, dass bei jedem Schritt zwei neue Kreise dazukommen – diese Anzahl von „fehlenden“ Schritten mit zwei; rechnet folglich $3 \cdot 2 = 6$. Bei dem Vergleich dieses Ergebnisses mit der schon in der Tabelle eingetragenen Zahl 16 fällt ihm auf, dass diese nicht übereinstimmen. Hieraus schlussfolgert Michael, dass seine anfänglichen Überlegungen zur Berechnung der Anzahl blauer Kreise falsch seien. Denn diese Strategie müsste – so Michael – für den Fall, dass sie richtig ist, bei der Lösung aller Aufgaben zur Berechnung der Anzahl blauer Kreise gelten. Dabei lässt Michael aber anscheinend außer Sicht, dass seine anfängliche Rechnung im Grunde die Form $10 + 2 + 2 + 2 = 16$ hatte.

94 M (*Streicht die 86 durch und schreibt 102 drüber*) Ja, ich hab das vorher so gerechnet, mit der dreiundvierzig mal zwei, aber irgendwie kann das eigentlich auch nicht klappen, also weiß ich selbst nicht. (...) Vielleicht ist das falsch, weil ich die dreiundvierzig mal zwei gerechnet habe, und das ist insofern falsch, weil wenn man jetzt, bei der 7 hab ich zum Beispiel auch nicht jetzt drei mal zwei gerechnet, weil da käme dann jetzt, drei mal zwei das sind ja sechs, also wäre das dann auch insofern falsch.

Die Interviewerin versucht den Schüler dazu zu ermutigen, nochmals über seine Methode nachzudenken, und macht ihn deutlich darauf aufmerksam, dass er nur den Abstand von 7 bis 50 berechnet, nicht aber die Zahlen vor der 7 bedacht hat. Damit sei seine Methode nicht falsch, sondern nur unvollständig. Diese Äußerung der Interviewerin deutet Michael jedoch als eine Aufforderung, seine Methode anhand der Zahlen „vor sieben" nochmals zu überprüfen. Er wählt für die neue Probe die Zahl 5 als Ausgangspunkt, rechnet die Anzahl der zwischen der fünften und der fünfzigsten Figur liegenden Abbildungen, multipliziert die Differenz mit zwei und erhält das Ergebnis 90. Die Abweichung dieses Resultats von der mit dem Term $n \cdot 2 + 2$ berechneten Zahl 102, an deren Richtigkeit er eigentlich keinen Zweifel hat, bekräftigt seine Ansicht, dass er die alte Methode verwerfen soll. Der Schüler argumentiert wie folgt:

100 M Ja, bei der 5 ist dann ja, wenn jetzt, fünfundvierzig mal zwei, das sind ja neunzig, und dann ist das ja auch irgendwie unlogisch, weil man jetzt mit dieser Methode rechnet (*zeigt auf den Term* $n \cdot 2 + 2$), mit dem n mal zwei plus zwei.

Mit dieser Äußerung wird offensichtlich, dass der Schüler keinen Anlass sieht, mehr über seine alte Methode nachzudenken und der Sachverhalt für ihn damit abgeschlossen ist.

Episode 3: Michael bestimmt die Gesamtanzahl der Kreise

Bei der Anzahlbestimmung der Kreise insgesamt ist Michael absolut sicher, dass er für alle Spalten mit konkreten Figurennummern die entsprechenden Werte der ersten und zweiten Tabellenzeilen „einfach zusammenrechnen muss". Ohne die Zuhilfenahme der drei abgebildeten Figuren, führt Michael seine Berechnungen durch und trägt die Ergebnisse in die dritte Zeile der Tabelle ein. Die n-Spalte jedoch stellt für Michael ein unüberwindbares Hindernis dar und bleibt zunächst außen vor. Erst auf eine gezielte Nachfrage der Interviewerin hin widmet sich der Schüler diesem Tabellenfeld und versucht nun, mehrere Zahlenbeziehungen gleichzeitig zu verfolgen:

110	M	Bei n könnte man vielleicht rechnen (...) ja (...), wenn man jetzt diese fünf hat (*zeigt auf die 5 in der 1er Spalte*) und dann (..) ja wie soll man das sagen? Mmm (*24 Sek. Pause*) vielleicht könnte man das hier mit den Abständen machen. Weil von der fünf bis zur acht sind drei, von der acht bis zur elf sind auch drei, und von der elf bis zur vierzehn sind auch wieder drei.
111	I	Mmh.
112	M	Vielleicht könnte man dann rechnen (..) n plus (..) nee, jetzt hab ich es. Man kann von den Zahlen (*zeigt auf die zweite Zeile*) auch gut ausgehen. Weil hier ist plus eins, dann zwei, dann plus drei, dann plus vier (*zeigt jeweils in der 1er, 2er, 3er, 4er Spalte zunächst auf die Zahl in der zweiten dann auf die in der dritten Zeile*) ist auch irgendwie, das geht irgendwie. Dieses, die untere Zeile geht irgendwie mit der oberen Zeile, da wird immer plus eins, und da, wenn man die dann zusammenrechnet, gehts auch immer plus eins. Weil das sind dann plus fünf, ach, plus eins, plus zwei, plus drei und dann plus vier (*zeigt jeweils in der 1er, 2er, 3er, 4er Spalte zunächst auf die Zahl in der zweiten dann auf die in der dritten Zeile*). Und hier ist das auch (*zeigt auf die 7er Spalte*), das sind dann plus sechs.
113	I	Sieben
114	M	Nee, das ist dann plus sechs, hier kommt dann noch plus fünf (*zeigt neben die 4er Spalte*) häh? Das sind plus sieben. Plus fünf, plus sechs (*zeigt zwischen der 4er und der 7er Spalte*) und dann plus sieben (*zeigt auf die 7er Spalte*). Wenn man hier die ganzen Zahlen rechnet (*zeigt zwischen die 7er und die 50er Spalte*), dann wird es nur schwer bis zur hundertzweiundfünfzig zu kommen.

Durch die Betrachtung der neuen Zahlenfolge 5, 8, 11, 14 gelangt Michael somit zu der Erkenntnis, dass sich die Zahlen dieser Zahlenfolge in gleichen Dreierabständen voneinander befinden. Laut Michael ist es möglich, „mit den Abständen“ (vgl. Transkriptzeile 110) in der Zahlenfolge zu arbeiten, mithin die Regelmäßigkeit im Wachstum der Folge zu nutzen, sodass der Abstand von Figur zu Figur in der Figurenfolge bzw. von Glied zu Glied der Zahlenfolge stets 3 beträgt und dadurch eine allgemeine Formel zu bestimmen. Dieser Gedankengang wird von Michael jedoch nicht weiter verfolgt. Er fängt an, die zu beobachtenden Zuwächse spaltenweise zu untersuchen, kommt zur Progression +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7 und das hilft ihm auch nicht weiter. Wie bereits in Episode 1, bringt seine Untersuchung keine konstante Zahl hervor, sodass sich Michael einem langen, aus Einzelschritten bestehenden Weg gegenüber sieht. Daraufhin meint der Schüler, dass es schwer wird, „bis zur hundertzweiundfünfzig zu kommen“ (vgl. Transkriptzeile 114).

Michael ist somit mit seinen beiden unterschiedlichen Ansätzen zur Bestimmung der Gesamtanzahl der Kreise gescheitert. An dieser Stelle führt die Interviewerin Michael an sein ursprüngliches Verfahren des Addierens zurück:

129	I	Sag mal, also wie hast du dann fünf hier ausgerechnet (*zeigt auf die 5 in der 1er Spalte*), nach welcher Methode, was hast du gemacht, um fünf zu bekommen?
130	M	Ähm, ich hab hier eins plus vier (*zeigt dabei auf die 1 und die 4 in der 1er Spalte*).
131	I	Aha, wie hast du acht (*zeigt dabei auf die 8 in der 2er Spalte*) rausgefunden?
132	M	Zwei und sechs, dann drei und acht, dann vier und zehn (*zeigt jeweils auf die ersten beiden Einträge in jeder Spalte*) und hier (*zeigt auf die letzten beiden Spalten*) dann das gleiche.

Die Frage, ob er mit dieser Methode weiter verfahren wolle, beantwortet Michael mit:

134	M	Kann man ja vielleicht (..)
135	I	Was kommt dann raus?
136	M	(*8 Sek. Pause*) Ich weiß nicht, ob man das machen darf, mit n plus n plus zwei.

Diese Antwort lässt vermuten, dass für Michael eine Formel ein Rechenschema darstellt. Es scheint für ihn nicht selbstverständlich zu sein, dass man mit Schemata operieren kann wie mit Zahlen. Da Michael diese Möglichkeit durch seine Äußerung „Kann man ja vielleicht" (vgl. Transkriptzeile 134) nicht von vornherein ausschließt, wird er dazu aufgefordert, die Additionsmethode auch an der n-Spalte auszuprobieren. Das versucht der Schüler, indem er gleichzeitig die Richtigkeit seiner Überlegungen durch einen konkreten Zahlenwert, die 4, überprüft:

137	I	Probieren wir.
138	M	Weil wenn man jetzt n, also hier haben wir jetzt zum Beispiel die vier (*zeigt auf 4er Spalte*) und dann zum Beispiel jetzt plus n sind dann zum Beispiel (..) acht und dann kann man zwei dazu rechnen und dann hat man da auch vierzehn. Weil ich glaub wir hatten mal so ein Blatt, da mussten wir auch n plus n nehmen.

Zur Bekräftigung seiner Überlegungen stützt sich Michael anscheinend auf vage Erinnerungen an Arbeitsblätter in den Unterrichtsaktivitäten. Jedoch hat sich der Schüler offensichtlich lediglich die äußere Form der möglichen algebraischen Ausdrücke eingeprägt, nicht aber deren Inhalt und Zusammenhang. Er versucht, durch die Rekonstruktion dieser Erinnerungen einen Term aufzustellen, statt sich auf seine eigenen Erkenntnisse während der Interviewsequenz KREISE zu stützen.

Michael stellt alle seine Berechnungen im Kopf an und wird von der Interviewerin wiederholt aufgefordert, seine Überlegungen zu verschriftlichen:

139	I	Mmh, schreibs auf und dann gucken wir, wir prüfen das einfach.
140	M	(schreibt $n + n + 2$ in die n-Spalte) plus zwei.
141	I	Mmh
142	M	Ja. (*5 Sek. Pause*) Ja.
143	I	Ist das richtig so?
144	M	Also, ich mein schon, weil man kann jetzt auch drei plus (*5 Sek. Pause*) drei plus zum Beispiel sechs und dann kann man ja plus zwei, oder zwei plus vier und dann plus zwei.
145	I	Okay.

Da Michael weder die Entstehung seiner Formel erklärt, noch sich diese Formel bei den Proben mit konkreten Zahlenbeispielen bewährt, verwirft der Schüler sein Konstrukt und streicht seinen Term $n + n + 2$ in der Tabelle wieder durch. Anschließend stellt er nach einigem Überlegen den neuen Term $n - 2 + 2$ auf:

146	M	Nee, jetzt hab ich es. Das ist falsch (*streicht das $n + n + 2$ durch*) jetzt hab ich es nämlich richtig. Das ist nämlich n, wie war es jetzt noch mal (*6 Sek. Pause*). Ach wie war es jetzt noch mal? Vielleicht kann man n minus zwei und dann plus, mal gucken, das geht (*sieht dabei auf die vorherigen Spalten*) dann zieht man ja von der vier (*zeigt auf die 4 in der ersten Spalte*) zum Beispiel jetzt zwei ab. Dann hat man ja eins plus zwei, dann sind das drei. Dann zieht man da zwei (*zeigt auf die zweite Spalte*), ja eigentlich ging das dann vielleicht (schreibt $n - 2 + 2$ auf).
147	I	Okay.
148	M	n plus zwei minus zwei. Wenn man da dann zwei abzieht (*zeigt auf die 8 in der 3er Spalte*), sind sechs, dann haben wir neun, und dann plus zwei. (..) So könnte das eigentlich klappen.

Michaels Überlegungen ab der Transkriptzeile 146 sind nicht gleich nachvollziehbar und bedürfen näherer Betrachtung zur Erklärung seines Terms $n - 2 + 2$ (Tabelle 4.3). Diese Tabelle ist ein Versuch, die Denkhandlungen des Kindes anhand seiner verbalen Äußerungen, Gestik und schriftlichen Notationen zu rekonstruieren.

Tabelle 4.3: Aufgabe KREISE: Michaels Notation

Äußerung	Denkhandlung
Vielleicht kann man n minus zwei und dann plus *(schreibt $n-2+$)*	
dann zieht man ja von der vier (*zeigt auf die 4 in der 1er Spalte*) zum Beispiel jetzt zwei ab.	Kind sieht in n die Anzahl der blauen Kreise; setzt in seinem Termanfang den Zahlenwert 4 für n ein, rechnet also $4-2$.
Dann hat man ja eins plus zwei	Addiert zur Anzahl der gelben Kreise 1 in der ersten Spalte sein Ergebnis aus der zuvor ausgeführten Substraktion $4-2$; rechnet also $1+(4-2)$.
dann sind das drei	Das Ergebnis der Rechnung $1+(4-2)$ ist 3.
dann zieht man da zwei (*zeigt auf die zweite Spalte, schreibt $n-2+2$*), ja eigentlich ging das dann vielleicht	Kind bricht seinen Gedankengang bzgl. der ersten Spalte ab und wendet sich der zweiten Spalte zu.
Wenn man da dann zwei abzieht (*zeigt auf die 8 in der 3er Spalte*)	Überprüft seinen Term $n-2+2$ anhand der Anzahl blauer Kreise in der dritten Spalte; rechnet also $8-2$.
sind sechs, dann haben wir neun	Das Ergebnis seiner Rechnung $8-2$ ist 6; Kind addiert zu diesem Ergebnis die Anzahl der gelben Kreise der dritten Spalte und rechnet $6+3=9$ aus.
und dann plus zwei	Addiert zu dem vorherigen Ergebnis 9 die Zahl 2; sieht, dass das Ergebnis 11 mit dem Eintrag der Gesamtanzahl der Kreise in der dritten Spalte übereinstimmt.
So könnte das eigentlich klappen	Kind hat seine Methode $blau-2+gelb+2$ anhand von zwei Spalten überprüft und sieht seinen Term als bestätigt.

Bis zu diesem Zeitpunkt hat Michael nahezu 20 Minuten lang äußerst konzentriert und ohne Unterbrechung gearbeitet, wobei er zum Schluss sichtlich überfordert war. Als Michael durch Hantieren mit Zahlen zu einer neuen Formel zu gelangen versucht und mit dem Term $n-2+2$ meint, dass es „so eigentlich klappen könnte“ (vgl. Transkriptzeile 148), beendet die Interviewerin die Bearbeitung der Aufgabe.

Gesamtschau: Charakteristika von Michaels Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe KREISE

Die Bearbeitung der Aufgabe beginnt Michael mit dem Ablesen der Anzahl der Kreise an den Figuren und dem Ausfüllen der Tabelle. Sehr früh wechselt er jedoch zu dem Tabelleneintrag als einzigem Darstellungsmittel ohne Bezug auf die Figurenfolge. Der Schüler erkennt die Veränderung in dem Aufbau der Zahlenfolgen, dadurch formieren sich die Zählmethoden. Mit deren Hilfe versucht er die höheren Zahlen zu bestimmen und nimmt dabei eine *Struktur-Rahmung* an.

Michael führt seine Überlegungen und alle arithmetischen Rechnungen im Kopf durch und erschwert sich dadurch die Mustererkennung. Es gelingt ihm, die allgemeinen Terme jeweils für die Anzahlen der gelben und blauen Kreise aufzustellen. Diese Terme entstehen durch die Betrachtung der Beziehungen von Zahlen innerhalb der Tabelle. Die Art seiner Argumentation kann als *arithmetisch-konstruktiv* bezeichnet werden, da der Schüler die Tabelleneinträge in einem strukturellen Zusammenhang deutet und für seine Ausrechnungen verwendet.

Michael gelang es, die Gesetzmäßigkeit zu beobachten und mit eigenen Worten zu beschreiben, jedoch nicht sie strukturell zu erfassen.

4.1.1.4 Vergleichende Analyse der Fallstudien

Bei der Bearbeitung der Aufgabe KREISE entwickeln die drei ausgewählten Schüler unterschiedliche Zählstrategien. Alle drei Probanden orientieren sich bei der Mustererkennung hauptsächlich an der Zahlenfolge, nicht an der Figurenfolge. Bei Kevin ist aufgrund seines souveränen Auftretens jedoch nicht auszuschließen, dass er die beiden Folgen mental in Beziehung setzt, dies jedoch nicht zum Ausdruck bringt. Als bezeichnend hervorzuheben ist hier, dass Kevin – neben einem russischen Schüler – als einziger in der Abbildung der Kreise eine Strukturformel eines chemischen Stoffes wiedererkannt hatte. So stellte Kevin eine Verbindung zur Chemie und damit vom Abstrakten zum Konkreten her (Wygotski). [2] Das erkannte

[2] Anzumerken ist allerdings, dass sowohl Kevin als auch der andere Schüler bereits im Elternhaus mit der Darstellung chemischer Formeln Bekanntschaft gemacht hatten.

Muster können Laura und Michael lediglich verbal mit eigenen Worten beschreiben. Kevin hingegen ist in der Lage, seine Sprache mit Fachtermini zu versetzen und das Muster strukturell zu beschreiben.

Alle drei Schüler bewältigen die formal-symbolische Darstellung, schreiten jedoch unterschiedlich fort. Bei der formalen Darstellung der Anzahl der gelben Kreise für eine beliebige Figurennummer schaffen Kevin, Laura und Michael es, einen Term aufzustellen. Bemerkenswert an dieser Stelle ist, dass für keinen der drei Schüler n für sich alleine einen Term darstellt. Vielmehr bedarf es zur Erfüllung der äußeren Form einer Verknüpfung des n mit einer Zahl, etwa durch Addition $(n+0)$ oder Multiplikation $(n \cdot 1)$, auch wenn ihnen die Tatsache bewusst ist, dass der Wert von n hierdurch nicht verändert wird. Die formale Darstellung der Anzahl der blauen Kreise für eine beliebige Figurennummer gelingt auch allen Probanden. Laura und Michael nehmen diese Hürde allerdings erst nach einem Sichtwechsel: sie verfolgen nicht mehr die anfangs beobachtete Veränderung in der Zahlenfolge, sondern manipulieren mit Zahlenpaaren und versuchen erfolgreich, einer Gesetzmäßigkeit auf die Spur zu kommen.

Differenzierte Ergebnisse zeigte die Aufgabe, die Gesamtanzahl der Kreise für eine beliebige Figurennummer zu bestimmen. Während Michael an dieser Stelle scheiterte, sein an konkreten Zahlenbeispielen erprobtes Additionsverfahren in allgemeiner Form darzustellen, hatte Kevin diesen Schritt mit der gleichen Zählstrategie mit Leichtigkeit gemeistert. Auch Laura hatte schnell einen richtigen Term für die Gesamtanzahl der Kreise konstruiert. Auf gezielte Nachfrage der Interviewerin über das Zustandekommen der Formel, zeigte sich jedoch, dass Laura die Terme der gelben und blauen Kreise nicht – wie man zunächst leicht annehmen könnte – addiert hatte. Statt dessen hatte sie sich an zwei bereits ermittelten Gliedern zweier Folgen orientiert, die beiden in Beziehung gesetzt und die Formel durch Ausprobieren herausgefunden. Erst die Frage nach der Anwendbarkeit von Lauras Additionsverfahren auch auf Terme für gelbe und blaue Kreise, bringt die Probleme des Variablenverständnisses der Schülerin zum Vorschein.

4.1.2 Fallstudien zur Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

In dieser Aufgabe sollen die Kinder Würfelschlangen aus Holzwürfeln bauen und die Menge der sichtbaren Quadrate in Abhängigkeit der Länge der Schlange –

der Anzahl der Würfel – bestimmen. In Bezug auf Hintergründe und Detaills der Konzeption der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE kann auf die Ausführungen in Kapitel 2.3.3 verwiesen werden. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die folgenden Fragestellungen:

- Auf welche Weise strukturieren Kinder die Menge der sichtbaren Quadrate, damit diese gut gezählt werden könnten?
- Wie erfassen Kinder ihre Erkenntnisse?
- Was verstehen Kinder unter der Variablen n?
- Welche Rolle spielen die unterschiedlichen Darstellungen (konkrete Gegenstände, Tabelle, formale Sprache) bei ihren Überlegungen?

4.1.2.1 Kevin

Die Interviewsequenz der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE nahm ca. 6 Minuten in Anspruch. Kevin soll in dieser Aufgabe die Anzahl der sichtbaren Quadrate unterschiedlich langer Würfelschlangen bestimmen.

Der Schüler stellt die Aufgabenstellung sogleich in Verbingung mit den zuvor bearbeiteten Arbeitsblättern und beginnt seine Bearbeitung mit folgender Äußerung:

16	K	Dann mach ich das erst mal wie auf den Arbeitsbtättern.

Obwohl die WÜRFELSCHLANGE eine Aufgabe neuen Formats bildet, überträgt der Schüler seine Erfahrungen auf diese neue Situation. Dabei lässt sich leider nicht genau feststellen, ob Kevin auf seine Erfahrungen in den Unterrichtsaktivitäten oder aber auf die in der vorhergehenden Interviewsequenz der Aufgabe KREISE zurückgreift.

Kevin nutzt das leere Arbeitsblatt dazu, zunächst in die linke obere Ecke ein dreidimensionales Bild eines Würfels einzuzeichnen und hält seine Ergebnisse darunter in tabellarischer Form fest (Abb. 4.7). Anschließend zählt er laut die sichtbaren Quadrate an der 2er-Würfelschlange ab und macht die entsprechende Einträge in seiner Tabelle. Leider lässt die Videoaufnahme an dieser Stelle seine Zeigetechnik nicht deutlich erkennen. Seine Zählweise „zwei, vier, sechs, sieben, acht“ könnte jedoch darauf hindeuten, dass er zunächst die Quadrate an den längeren Seiten der Würfelschlange gebündelt zählt und danach zwei einzelne Quadrate an den Enden hinzu addiert. Auch nach Hizufügen des dritten Würfels zählt Kevin die Quadrate mit: „drei, sechs, neun, zehn, elf“ laut ab. Obwohl die Zeigehandlung des Schülers wiederum nicht auf dem Videoaufnahme festgehalten worden ist, kann diese Äußerung dahingehend interpretiert werden, dass Kevin zunächst drei Dreierreihen zählt und anschließend zwei einzelne Quadrate hinzufügt. Nach Eintragen der Ergebnisse in seine Tabelle verkündet Kevin, dass er eine Formel für den Sachverhalt gefunden habe:

30	K	So, ich glaub ich hab auch schon die Formel.
31	I	Schreib das auf. n Würfel, also.
32	K	n mal drei plus zwei (schreibt $n \cdot 3 + 2$)

Die Interviewerin bittet Kevin, seine Formel $n \cdot 3 + 2$ am Beispiel von fünf Würfeln zu erklären:

33	I	Mmh, kannst du das bitte erklären? Wenn wir fünf hätten?
34	K	Wenn wir fünf Würfel hätten?
35	I	Mmh.
36	K	Dann würden wir, also fünf ist ja n *(legt fünf Würfel aneinander)*, und fünf mal drei ist fünfzehn, plus 2 sind siebzehn. Dann rechnen wir das jetzt mal nach. Das sind dann fünf, fünf, zehn, fünfzehn *(zeigt zunächst auf die vordere, dann die obere, dann die hintere lange Seite der Würfelschlange)*, sechzehn, siebzehn *(tippt dabei auf die beiden Ecken der Würfelschlange)*. Also, ja. Stimmt das.

Die Frage der Interviewerin „Kannst du das bitte erklären?“ versteht Kevin offensichtlich als die Aufforderung, seine Formel an einem konkreten Zahlenbeispiel zu überprüfen. Das macht der Schüler, indem er zunächst die Zahl 5 in seiner Formel einsetzt und ausrechnet. Dass Kevin im Fall $n = 5$ die Formel auf die Struktur der Zählhandlung verifiziert (vgl. Transkriptzeile 36), ist ein Indiz für die angenommene statische Perspektive und die damit verbundene Art der Formelgenerierung.

Bei der Frage nach zehn Würfeln demonstriert Kevin an der 10er-Schlange, dass er zunächst drei Seiten mit jeweils Zehnerbündeln und dann die Enden der Würfelschlange betrachtet. Hier erklärt der Schüler nochmals indirekt, wie man diese Strukturierung der Schlange zur Anzahlbestimmung der sichtbaren Quadrate für eine beliebige Anzahl der Würfel benutzen kann:

42	K	Also, ich hab ja *(zeigt auf die vordere lange Seite der Würfelschlange)* hier längs, sagen wir jetzt mal, hab ich ja immer zehn, die rechne ich dann ja mal, mal drei und das sind komischerweise auch zehn Würfel, also zehn, zwanzig, dreißig *(zeigt zunächst auf die vordere, dann die obere, dann die hintere lange Seite)* einunddreißig, zweiunddreißig *(zeigt auf die beiden Ecken)*.

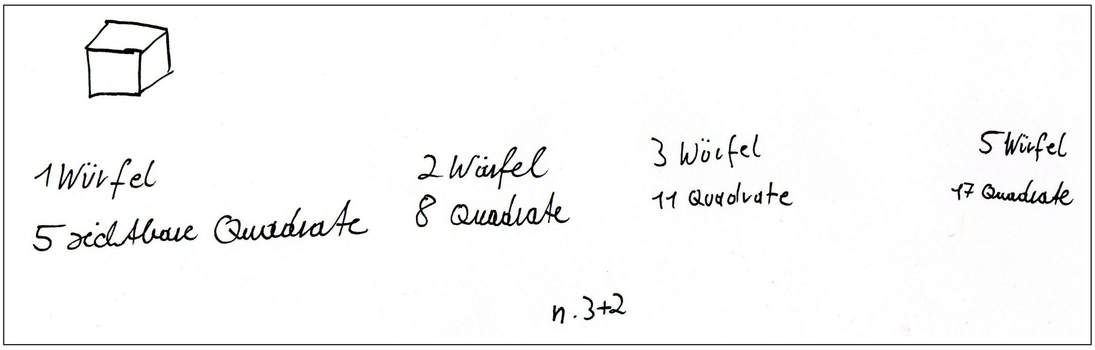


Abbildung 4.7: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Kevins Lösung

Gesamtschau: Charakteristika von Kevins Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

Mit der Aufgabe konfrontiert beginnt Kevin zunächst damit die sichtbaren Quadrate erst eines Würfels zu zählen und baut danach mit dem angebotenen Material die beiden nächsten Würfelschlangen nach. Auch hier zählt er wieder die Anzahl der sichtbaren Quadrate, wobei sich die Formierung einer bestimmten Abzählmethode durch seine Gestik zeigt. Er notiert seine Ergebnisse in einer bestimmten Systematik, indem er sie in einer Art Tabelle festhält. Kevin erkennt das Muster im Bauplan der Würfelschlangen und unter Annahme einer statischen Perspektive ist er in der Lage das Erkannte strukturell zu beschreiben. Er stellt seine Erkenntnisse mit Hilfe eines Terms symbolisch dar. Die Variable n deutet er als Anzahl der Würfel einer Würfelschlange, begründet seine Formel durch das Struktur-Muster; das jeder einzelnen Würfelschlange zu Grunde liegt und zeigt wie er seine Formel für jede beliebige Anzahl an Würfeln anwenden kann.

Die von Kevin hervorgebrachten Argumente auf die Frage nach 5 und 10 Würfeln können der *algebraischen* Art der Argumentation zugeordnet werden.

4.1.2.2 Laura

Die Interviewsequenz der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE nahm bei Laura ca. 9 Minuten in Anspruch.

Für die ersten beiden Schlangen – bestehend aus einem bzw. zwei Würfeln – ermittelt Laura die Anzahl der sichtbaren Quadrate durch reines visuelles Wahrnehmen und hält die ermittelten Zahlen in einer Tabelle fest (Abb. 4.8). Erst bei der dritten Schlange zählt die Schülerin die Quadrate ab – zunächst die beiden

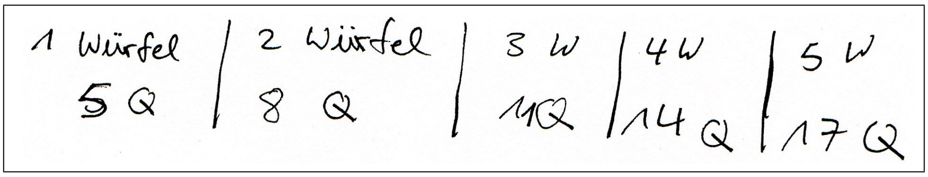


Abbildung 4.8: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Lauras Tabelle

Quadrate an den Enden, dann die hintere lange, die vordere lange und zuletzt die obere lange Seite der Schlange – und fügt die Zahlen ihrer Tabelle hinzu.

Auffälig ist, dass Laura ihre Tabelle mit ausgeschriebenen Worteinträgen beginnt, wie etwa „1 Würfel“. Ab der dritten Tabellenspalte verwendet die Schülerin neben der Abkürzung „Q“ für Quadrate auch die Abkürzung „W“ für Würfel.

Um die Anzahl der sichtbaren Würfelflächen der nächst größeren Schlange zu ermitteln, übergeht Laura das Abzählen und stellt bereits eine Vermutung auf, welche Anzahl sichtbarer Quadrate eine Würfelschlange mit vier Würfeln haben könnte. Sie schreibt 4W und 14Q nieder und begründet diese Tabelleneinträge dadurch, dass „man die n immer plus drei rechnen muss“:

24 L ... Dann bin ich immer auf plus drei gekommen, also darauf gekommen, weil zuerst waren es fünf und beim zweiten Würfel waren es acht, und da waren immer drei, sage ich mal, Quadrate kamen dazu.

Daraufhin wird Laura gebeten, diese Gesetzmäßigkeit der Zahlenentwicklung anhand des Materials zu demonstrieren. Laura bildet die nächste Würfelschlange und versucht, die Veränderung „+3“ anschaulich zu rechtfertigen. Beim Zählen der Quadrate kommt sie allerdings auf die Zahl „+4“ und bemerkt verwundert, dass ihr ermitteltes Muster – immer plus drei bei jedem neuen Würfel – nicht „aufgeht“. Ab diesem Zeitpunkt nimmt die Schülerin eine dynamische Sichtweise ein und beobachtet die Veränderung, die mit dem Hinzuschieben des vierten Würfels an die 3er-Schlange eintritt. Dies wird insbesondere deutlich, als Laura anhand der Würfelschlange durch Hinzu- und Wegschieben des vierten bzw. fünften Würfels die Anzahl sichtbarer Quadrate bei äußeren (4 sichtbare Quadrate) und inneren Würfeln (3 sichtbare Quadrate) thematisiert und auf diesem Wege die Bedeutung der „immer plus drei“ erklärt. Auf Nachfrage der Interviewerin schreibt Laura diese gewonnene Einsicht als Formel auf. Dabei greift sie auf die durch die ersten Glieder der Zahlenfolge suggerierte Veränderung „+3“ und notiert $n+3$ sowie $n-3$. Damit kann sie in der Tabelle sowohl vor- als auch rückwärts voran gehen.

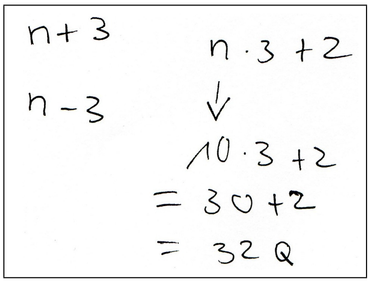


Abbildung 4.9: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Lauras Lösung

Mit der Aufgabe konfrontiert, die Anzahl der Quadrate für 10 Würfel zu bestimmen, merkt die Schülerin, dass sie ihre bisher aufgestellte Formel $n+3$ hierbei nicht anwenden kann, da ihr das Ergebnis von der 9er-Schlange nicht bekannt ist. Als die Interviewerin ihr weitere fünf Würfel zu einer Zehnerreihe hinzuschiebt, stellt Laura überraschend schnell eine neue Formel auf: $n \cdot 3 + 2$ (Abb. 4.9).

Betrachten wir den Transkriptausschnitt zu dieser Episode:

42	L	Zehn Würfel, mmm, das sind zehn Würfel, mmm (..) kann man wieder mit mal rechnen, glaube ich. Ich schreibe mal was auf (*schreibt* $n \cdot 3 + 2$ *auf; flüstert*) dann wüsste ich jetzt eine Gesetzmäßigkeit für zehn. Dann drei mal zehn, dann ist jetzt das (*zeigt auf* n) zehn (*schreibt unter das* $n \cdot 3 + 2$ *den Term* $10 \cdot 3 + 2$) drei mal zehn plus zwei das sind gleich 30 plus zwei, sind gleich 32. (*schreibt =30+2=32*) Sind dann 32 Quadrate.
43	I	Wie bist du auf n mal drei plus zwei gekommen?
44	L	Ähm, da habe ich mir überlegt, das sind zwei Würfel (*zeigt auf ihre 2-te Spalte*) und dann habe ich überlegt, was kommt in die Nähe von acht und das sind dann drei, zwei mal drei sind sechs, und dann habe ich mir überlegt, wie viel es bis zur acht wird und das sind zwei, weil die, weil die drei, nein die zwei kann keine acht, doch kann sie wohl, mit zwei mal vier, aber das geht dann bei den anderen nicht (*zeigt auf die anderen Spalten*), weil drei kann nicht auf die elf kommen und drei mal drei sind neun und plus zwei sind elf. Dann geht das auch da (*zeigt auf die erste Spalte*) denn drei mal eins sind drei plus zwei sind fünf und hier (*zeigt auf die letzten Spalten mit 4 W und 5 W*) ist das genauso.

Von besonderer Bedeutung ist hier, dass Laura bei der Erläuterung ihrer Vorgehensweise zur Erstellung der neuen Formel ihre Argumentationsgrundlage sowie die Verwendung der Variablen n verändert. Ihre Formelherleitung bezieht sich nicht mehr wie zuvor auf das Operieren mit konkreten Holzwürfeln und auf das wechselseitige Betrachten von Würfelreihe und Zahlenfolge. Sie stützt ihre Überlegungen nunmehr arithmetisch allein auf die Zahlen in ihrer ausgefüllten Tabelle. Laura erschließt sich die Formel, indem sie sich anschaut, wie sich die Zahl 8 aus der Zahl 2 durch Multiplikation zusammengesetzt haben könnte. In die unmittelbare Nähe von 8 kommt sie durch die Rechnung $2 \cdot 3$, woraufhin ihr 2 bis zur 8 fehlen. Zwar wäre sie durch die Multiplikation $2 \cdot 4$ direkt auf die 8 gekommen, doch hätte dies nur für diesen einzelnen Fall gegolten. Durch Einbeziehung der nächsten Tabellenspalte für den Fall der drei Würfel gewinnt Laura Vertrauen in ihre neue Formel $n \cdot 3 + 2$. Bei der Berechnung für 50 Würfel nimmt sie ihre Formel bereits als vertrautes Objekt wahr und wendet diese an:

48 L 50, okay, das sind dann, mmm, das muss ich dann wieder anwenden, das sind dann, drei mal die 50 das sind 150, 152 müsste das dann sein.

Gesamtschau: Charakteristika von Lauras Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

Laura beginnt mit dem Abzählen der sichtbaren Quadrate der Würfelschlangen, dabei lässt sich durch ihre Gestik schon bei den ersten drei Schlangen die Formierung einer statischen Abzählmethode erkennen. Sie notiert ihre Ergebnisse in einer Tabelle, bei der die Zuordnung Anzahl der Würfel – Anzahl der sichtbaren Quadrate festgehalten wird. Ab diesem Zeitpunkt orientiert sich die Schülerin nach ihren Tabelleneinträgen, beobachtet ein Veränderungsmuster im Aufbau der Zahlenfolge, stellt eine Vermutung zu der Gesetzmäßigkeit „immer plus drei“ auf und prüft ihre Ergebnisse anhand der folgenden zwei Würfelschlangen.

Die formale Beschreibung des von ihr erkannten Musters stellt sie durch zwei Formeln $n+3$ und $n-3$ dar, bei denen die Variable n für die Anzahl der sichtbaren Quadrate des vorherigen, bzw. nächsten Tabelleneintrags steht und somit Formeln mit rekursivem Charakter sind. Als Laura mit der Aufgabe konfrontiert wird, ihre Formel anhand von Würfelschlangen zu erläutern zeigten sich Schwierigkeiten, die Formeln zu rechtfertigen und zu erklären wo sich „+3“ in den Würfelschlangen wiederfinden lässt. Es entsteht ein Konflikt zwischen der zu Beginn von ihr verwendeten Abzählmethode und dem erkannten Muster der Zahlenfolge, der dazu führt, dass das Muster von ihr nicht strukturell erfasst wird.

Um die Anzahl der Quadrate der 10er Würfelschlange zu bestimmen, nimmt sie Abstand zu ihren zuvor erstellten, sich nicht bewährten Formeln und erschließt anhand der Zahlenfolgen eine neue, $n \cdot 3 + 2$. Der Unterschied zwischen den beiden aufgestellten Formeln n+3 und n·3+2 liegt insbesondere darin, dass Laura dem n in beiden Ausführungen eine andere Bedeutung zuschreibt. In der ersten Formel steht n für die Anzahl der sichtbaren Quadrate der vorherigen Würfelschlange, sodass rekursiv gerechnet werden kann. In der zweiten Formel steht n für die Würfelanzahl der jeweiligen Würfelschlange.

Ihre Argumente bei der Beschreibung des erkannten Musters können als *arithmetisch-konstruktiv* eingeordnet werden. Die von Laura hervorgebrachten Argumente auf die Frage nach 10 Würfeln können der *algebraischen* Art der Argumentation zugeordnet werden, da die Schülerin im Laufe der Beantwortung dieser Frage zunächst eine allgemeine Formel aufstellt, um diese anschließend anzuwenden.

4.1.2.3 Michael

Die Interviewsequenz der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE nahm bei Michael ca. 17 Minuten in Anspruch. Bei der Bearbeitung der Aufgabe orientiert sich Michael von Anfang an sehr stark an konkreten und greifbaren Gegenständen (hier Holzwürfeln). Er bildet eine Würfelschlange, indem er zu der schon bestehenden Schlange einen Würfel hinzuschiebt. Dabei fertigt der Schüler eine Tabelle (Abbildung 4.10) als Darstellungsform für seine Beobachtungen an:

14	M	Also, mach ich jetzt einfach mal eins, mach ich einfach mal ne Tabelle.
15	I	Ja, das ist eine gute Idee.

Auffällig ist hier, dass Michael zunächst eine Vielzahl an Zeilen und Spalten zeichnet, bevor er mit den Einträgen beginnt. Vielleicht überträgt der Schüler die Art der Tabelle aus der Aufgabe KREISE auf eine neue Situation. Die Art der Tabelle kann aber auch ein Indiz dafür sein, dass Michael der funktionelle Zusammenhang zwischen der Anzahl der Quadrate und der Anzahl der Würfel noch verborgen bleibt.

Beim Hantieren mit den Holzwürfeln, durch das gleichzeitige Ausfüllen der Tabelle begleitet, kommt Michael einer Gesetzmäßigkeit auf die Spur:

18	M	Bei einem Würfel waren dann jetzt (..) ja (..) fünf Quadrate *(schreibt eine 5 unter die 1 in die Tabelle)*. Wenn man den zweiten dann da dran tut, hat man acht *(schreibt eine 8 unter die 2)*, dann tut man noch einen dritten dazu *(fügt einen dritten Würfel zu der Schlange dazu)* dann hat man, dann muss man eigentlich einen abziehen und vier dazu rechnen ... sind elf.

In der Äußerung „dann muss man eigentlich einen abziehen und vier dazu rechnen“ kann man die Entwicklung einer Zählstrategie erkennen. Die Interviewerin

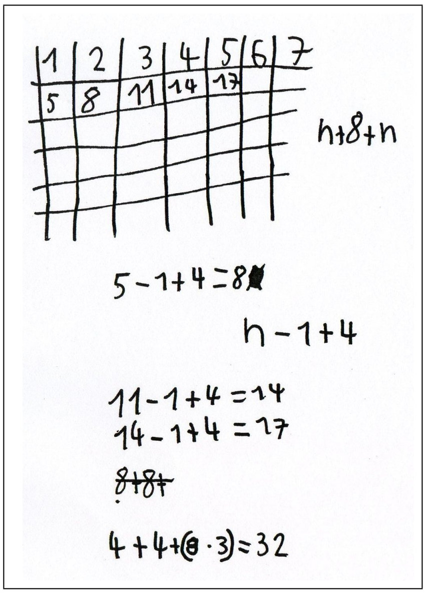


Abbildung 4.10: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Michaels Lösung

fordert den Schüler auf, sein Vorgehen zu erläutern. Michael argumentiert dabei offensichtlich anschauungsgebunden:

19	I	Elf ist richtig, ja. Wie hast du gezählt? Kannst du es erklären?
20	M	Kann man eigentlich ganz leicht ausrechnen. Also, gezählt habe ich vier *(zeigt auf die vier Quadrate am ersten Würfel)* plus drei *(zeigt auf die sichtbaren Quadrate am mittleren Würfel)* sind sieben und dann noch plus die vier *(zeigt auf die sichtbaren Quadrate am letzten Würfel)*, aber das kann man auch ganz einfach ausrechnen. Man hat jetzt acht *(stellt zwei Würfel aneinander auf den Tisch)*, dann rechnet man acht. Man kann, die Endzahl nehm ich jetzt mal, n minus eins plus vier *(fügt dabei den dritten Würfel wieder zu der Würfelschlange hinzu)*.

Interssant ist es, dass der Schüler zwei Handlungen das „Ausrechnen“ und das „Abzählen“ voneinander unterscheidet. Seine komplexe Äußerungsfolge beinhaltet auch zwei unterschiedliche Strukturierungen der Situation. Die erste Strukturierung enspricht einer statischen Betrachtung einer 3er Schlange, indem der Schüler zwischen zwei Arten von Würfeln in der Schlange unterscheidet. Einerseits gibt es die beiden äußeren Würfel mit 4 sichtbaren Quadraten und andererseits den mittleren Würfel der Schlange mit 3 sichtbaren Quadraten. Dementsprechend zählt Michael die sichtbaren Quadrate „vier plus drei sind sieben und dann noch plus die vier“ (vgl. Transkriptzeile 20). Er veranschaulicht seine Rechenhandlungen durch explizites Zeigen auf die Schlangenteile. Die zweite Strukturierung der Situation entspricht einer dynamischen Sicht und bringt einen rekursiven Ansatz mit sich. Michael betrachtet die Veränderung, die durch jeden hinzukommenden Würfel verursacht wird. Er geht von einer Anzahl an sichtbaren Quadraten als „Endzahl“ aus, berücksichtigt durch die Rechnung „minus eins“ eine Seite, die beim Heranschieben einen neuen Würfels verloren geht und rechnet zuletzt die sichtbaren Quadrate des Eckwürfels „plus vier“ aus. Dies führt zur allgemeinen Darstellung $n - 1 + 4$, die als Beschreibung seiner Rechenhandlungen bzw. als die Rechenanweisung interpretiert werden kann. Die Annahme, dass der Schüler die Variable n als die Anzahl sichtbarer Quadrate der vorherigen Schlange deutet, wird durch seine Erläuterung anhand der 2er Schlange bestätigt:

53	I	Okay, überprüfen wir, ob das funktioniert für zwei Würfel.
54	M	Also, erstmal hat man einen Würfel, und dann tut man den zweiten da dran und dann sieht man noch, da wurde eine Fläche verdeckt, und dann hat man noch vier statt fünf und dann rechnet man noch plus vier. Dann hat man acht raus, bei der zwei *(schreibt* $5 - 1 + 4 = 8$*)*.

Der Hinweis der Interviewerin, dass unter dem n die Anzahl an Würfeln, also die Figurennummer 2 in seiner Tabelle zu verstehen ist, stellt Michael vor ein Problem

68	M	Vielleicht, wenn das jetzt die Anzahl der Würfel ist, dann hat man ja erst einen Würfel.
69	I	Ja.
70	M	Wie soll man das denn dann machen? *(sieht sich einen Würfel an)* und der Würfel hat dann ja fünf Seiten, aber, mmm (7 Sek. Pause)

Mit seinem „Wie soll man das denn dann machen?“ bringt der Schüler das Auftauchen des Problems zum Ausdruck. Bis zu diesem Zeitpunkt nämlich verlief für Michael alles reibungslos. Er hatte die sichtbaren Quadrate abgezählt, eine Gesetzmäßigkeit darin erkannt, das Erkannte explizit an einem Beispiel aufzeigen können, eine Formel erstellt und mit dieser den Wert für die 2er Schlange berechnet, welcher mit dem schon ermittelten Wert aus der Tabelle übereinstimmte. Die Interviewerin interpretierte das Verhalten des Schülers und sein langes Schweigen dahingehend, dass Michael in eine gedankliche Sackgasse geraten war. Um ihm aus dieser herauszuhelfen, fragte sie nach der 5er und anschließend nach der 10er Schlange:

71 I Okay, wieviel hast du bei fünf?

72 M Bei fünf ist ein Würfel.

In dieser Frage-Antwort-Szene spiegelt sich ganz deutlich eine Situation der Rahmungsdifferenz wider. Die Interviewerin stellt ihre Frage in einer verkürzten Form, ohne zu erwähnen, um welche Quantitäten bei der Frage „wieviel“ und Objekten bei der Angabe „bei fünf“ es sich handelt. Bei ihrer Fragestellung meint sie die Anzahl an sichtbaren Quadraten bei fünf Würfeln in einer 5er Schlange. Der Schüler kann nicht wissen, was die Interviewerin damit meint und deutet die Frage seiner bisherigen Rahmung entsprechend. Er versteht unter der Angabe „fünf“ die Anzahl an sichtbaren Quadraten, da diese Zahl für ihn anscheinend für seinen Rechenansatz bedeutsam ist. In seiner Rahmung ist die Antwort „ein Würfel“ völlig korrekt.

73 I Nee, bei fünf Würfelchen zusammen.

74 M Achso, bei fünf hab ich dann siebzehn *(schaut in die Tabelle und schiebt 5 Würfel zusammen)*.

75 I Aha, du hast siebzehn. Sag mir, wieviele würdest du bei zehn haben *(legt eine weitere 5er Schlange auf den Tisch)*, wenn wir alle zehn in eine Schlangenlinie fügen?

76 M Bei zehn hat man dann *(schiebt beide kurze Schlangen aneinander*), man hat zehn Würfel, dann kann man (...) mmm *(5 Sek Pause)* bei zehn (..) hat man eigentlich (...) man kann eigentlich vier und vier sind dann acht *(zeigt auf die beiden äußeren Würfel)* und dann hat man ja neun, ach acht mal die drei (.) ja dann rechnet man acht mal drei.

Bei der Auseinandersetzung mit der Frage nach einer 10er Schlange vollzieht der Schüler einen Strategiewechsel. Er betrachtet die Situation nun wieder aus statischer Sicht und gliedert – seiner Vorgehensweise bei der 3er Schlange entsprechend – die 10er Schlange in zwei Eckwürfel und acht Würfel in der Mitte. Es ist schwierig, mit Sicherheit festzustellen, aus welchen Gründen Michael seine ursprüngliche Strukturierung wieder aufgreift, da er diese nicht offenlegt. Es können hier mindestens drei Erklärungen für seine Bewegungsgründe herangeführt werden. Zum einen kann Michael die Frage zur 10er Schlange von der vorherigen Geschichte losgelöst wahrgenommen und die Äußerung der Interviewerin „wenn wir alle zehn in eine Schlangenlinie fügen“(Transkriptzeile 75) als Aufforderung gerahmt haben, beide 5er Schlangen zu einer zusammen zu schieben. Nach Vollendung seiner Handlung liegt nur noch eine Schlange vor Michael auf dem Tisch, die sich sehr gut mit seinem anfangs erprobten und bereits bewährten Rechenansatz bearbeiten lässt. Dadurch, dass Michael die beiden 5er Schlangen sofort zusammenschiebt, entgeht ihm der Prozess des Anwachsens einzelner Würfel zur bestehenden Schlange. Als weitere Erklärung kommt die Annahme in Frage, dass seine rekursive Strategie Michael an dieser Stelle nicht hilfreich erscheint, da ihm eine „Endzahl" der vorherigen 9er Schlange nicht bekannt ist. Denkbar ist weiter, dass Michael seinen dynamischen Ansatz auf Grund des Scheiterns an der symbolischen Darstellung seiner Strategie an sich in Frage stellt. Vermutlich kehrt Michael daher zu seinem ursprünglichen, statischen Zugang zurück.

In der nachfolgenden interpretierten Szene stellt Michael eine weitere Formel auf, die seiner statischen Betrachtungsweise entspricht. Er beginnt damit, sein verbal ausgedrücktes Vorgehen (vgl. Transkriptzeile 76) schriftlich festzuhalten:

82	M	Also, vier sind das und das sind auch vier, das sind dann die Enden *(schreibt* $4+4$ *auf)*.
83	I	Achso, die Enden, klar.
84	M	Und dann kann man da eigentlich nen Term draus machen (..) weil dann mach ich jetzt mal (..) plus neun mal drei *(schreibt dies auf)*.
85	I	Welche neun?
86	M	Das sind die, oh nein, acht, acht mal drei *(macht aus der 9 eine 8)* wieder Klammer zu und dann mach ich ein gleich *(dort steht:* $4+4+(8\cdot 3)=$*)*. Da rechnet man jetzt acht mal drei sind dann vierundzwanzig, und dann die acht, also vier plus vier sind acht, sind dann zweiunddreißig, dann sind das hier zweiunddreißig Kästchen. *(schreibt 32 als Ergebnis auf)*.
87	I	Okay. Sehr gut.
88	M	Ja, das kann man eigentlich (...) n plus (..) n plus acht (..) plus *(5 Sek. Pause)* n plus acht *(schaut kurz seine Tabelle und dann die Schlange an)* plus (..) n plus acht plus n, also kommt drauf an, was man da *(zeigt in Richtung seiner Tabelle)* jetzt für eine Zahl hat.
89	I	Ja, okay, gut.
90	I	Also hier *(zeigt auf seine letzte Rechnung)* ist das dann immer acht mal drei und dann hat man immer (...) also kann man n plus acht plus n *(schreibt* $n+8+n$*)* machen. Eigentlich.

Die Bezeichnung „Term" (vgl. Transkriptzeile 84) und die ausführliche, sichere Erläuterung des Vorgehens mit Einbezug von vorliegenden Gegenständen, vermitteln den Eindruck, dass Michael hier explizit einen Algorithmus darstellt, mit dem die Anzahl von sichtbaren Quadraten einer beliebig langen Würfelschlange bestimmt werden kann. Die von ihm betrachteten zwei „Enden" liefern jeweils vier sichtbare Quadrate. Bei allen dazwischen liegenden Würfeln sind jeweils nur drei Quadrate sichtbar. Die Anzahl der 8 mittleren Würfel wird jedoch ohne Erklärung und erst genannt, nachdem der Schüler seine zunächst fehlerhafte Anzahl von 9 mittleren Würfeln selbst korregiert hat. Es ist nicht auszuschließen, dass Michael diese Zahl 8 durch die Subtraktion der 2 Eckwürfel von den 10 Würfeln der Schlange insgesamt ermittelt hat; eine optische Erfassung der Würfelanzahl ist allerdings wahrscheinlicher. Bei der Bestimmung der Anzahl sichtbarer Quadrate für eine 10er Schlange notiert Michael den Zahlenterm $4+4+(8\cdot 3)$, der deutlich seine Art der Sturkturierung wiedergibt. Bemerkenswert ist, dass der Schüler für die mittleren Würfel eine multiplikative Form $8\cdot 3$ findet; die „Endwürfel“, die die „Endzahlen“ 4 und 4 liefern, liegen in der Würfelschlange weit auseinander, so dass der Schüler in seiner Strukturierung der Formel $4+4$ separat betrachtet.

Gleich darauf unternimmt Michael einen erneuten Versuch, sein Vorgehen formal zu beschreiben. Es könnte vermutet werden, dass er den Sinn der Verwendung von den Buchstaben in mathematischen Kontexten noch nicht ganz verstanden hat. Obgleich der Schüler weiß, dass n für irgendeine Zahl steht (vgl. Transkriptzeile 88: „Kommt drauf an, was man da jetzt für eine Zahl hat“), scheint es, dass er n für die beständige Anzahl der Quadrate von End- und Anfangswürfel, die Zahl 8 dagegen für die variable Quadrateanzahl der Zwischenwürfel hält. Dies lässt sich aus seiner Notationsweise $n+8+n$ deuten, die die geometrische Anordnung widerspiegelt und analog zu seinem Term für die 10er Würfelschlange konstruiert ist. Es ist jedoch auch möglich, dass sich die 8 aus $4+4$ zusammensetzt, also Anzahl sichtbarer Quadrate von Anfangs- und Endwürfel. Beide Möglichkeiten sowie der Ausdruck „eigentlich“ (vgl. Transkriptzeile 90) weisen darauf hin, dass der Schüler unsicher ist und seiner eigenen symbolischen Beschreibung kein Vertrauen schenkt.

Gesamtschau: Charakteristika von Michaels Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Michael zunächst zwei unterschiedliche Zählstrategien zu verfolgen versucht und zwei Muster erkennt. Eines der Muster gibt die Veränderung beim Hinzukommen eines neuen Würfels zur bestehenden Würfelschlange wider; das andere Muster zeigt in einer Momentaufnahme die Struktur jeder einzelnen konkreten Würfelschlange. Nach Auftreten von Schwierigkeiten bei der Anwendung seines rekursiven Ansatzes bei dem Zuwachs-muster wendet sich der Schüler dem Muster der Momentaufnahme zu. Es gelingt Michael, diese beiden – aus den statischen und dynamischen Sichtweisen gewonnenen – Muster verbal zu beschreiben, allerdings ohne Verwendung der Fachsprache.

Für den konkreten Fall der 10er Schlange konstruiert Michael sogar einen Zahlenterm, der seine statische Betrachtungsweise widerspiegelt. Seine Notation $n + 8 + n$ spiegelt die geometrische Anordnung „$Anfang + Mitte + Ende$“ wider, sodass es scheint als sehe er die beiden Endwürfel als feste Größe an, sowie den Mittelteil als veränderlichen Teil. Dabei verwendet er die Variable n vermutlich für die konstante Anzahl sichtbarer Quadrate der beiden Endwürfel und die Zahl 8 für den austauschbaren veränderlichen Mittelteil. Seine Verwendung von Zahlen und Variablen ist somit in diesem Kontext entgegen der üblichen Konventionen anzusehen. Da er bei der Beschreibung seiner Überlegungen die Rolle der benutzten Zahlen nicht benennt, kann jedoch nicht mit Sicherheit festgestellt werden, ob er das Muster bereits strukturell erfasst hat. Aufgrund seiner Schwierigkeiten seine Erkenntnisse begrifflich zu artikulieren, ist es auch möglich, dass er bereits über die Stufe des strukturellen Erfassens hinausgeht und sich an das symbolische Beschreiben des allgemeinen Falles heranwagt.

Die Erläuterungen des Schülers erlauben es, die Art seiner Argumente als *arithmetisch-konstruktiv* zu bezeichnen.

4.1.2.4 Vergleichende Analyse der Fallstudien

Während Kevin statisch an das Abzählen der sichtbaren Quadrate herangeht, ist das Vorgehen von Laura und Michael zunächst dynamisch. In der Mustererkennung nutzen alle drei Schüler die inhärente Struktur der Würfelfolge. Bei der Musterbeschreibung zeigen sich allerdings deutliche Unterschiede. Kevin hat keine Schwierigkeiten, seine Erkenntnisse verbal und symbolisch zu erfassen; Laura hingegen scheitert bei dem Versuch, ihre dynamische Sichtweise zu formalisieren. Stattdessen greift sie auf ihre bewährte Technik zurück, nur zwei Zahlenfolgen untereinander zu vergleichen, eine Beziehung herzustellen und daraus durch Ausprobieren eine Formel aufzustellen. Die auf diese Weise erstellte Formel kann Laura auf eine 10er-Schlange anwenden. Michael schafft mit seinem dynamischen Ansatz den Schritt zur Formalisierung nicht. Bei der Frage nach der Anzahl sichtbarer Quadrate bei 10 Würfeln vollzieht er daher einen Sichtwechsel hin zu einer statischen Betrachtungsweise und gliedert die 10er-Schlange in zwei „Endstücke“ (Würfel an den Enden der

Würfelschlange) und acht „Mittelstücke“. Mit dieser Sichtweise gelangt Michael zu einem arithmetischen Term, der Schritt zur Formalisierung gelingt ihm aber auch hier nicht.

4.1.3 Fallstudien zur Aufgabe ZAHLENSUMME

Die Aufgabenstellung der Aufgabe ZAHLENSUMME enthält folgende Aussage: Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar. Ausführliche Erläuterungen zur Entstehung dieser Aufgabe finden sich in Kapitel 2.3.3.

Im Rahmen der Analyseprozesse waren unter anderem folgende Fragestellungen zu analysieren:

- Wie mathematisiert das Kind diese offene Aufgabe in Textform?
- Welche Rolle spielt die Fachsprache?
- Welche Rolle spielen die unterschiedlichen Darstellungen (konkrete Gegenstände, Zahlenstrahl, formale Sprache) bei den Überlegungen des Kindes?
- Wie läuft die Formalisierung der Erkenntnisse ab?

4.1.3.1 Kevin

Die Interviewsequenz der Aufgabe ZAHLENSUMME nahm bei Kevin ca. 15 Minuten in Anspruch. Sie lässt sich in vier Episoden einteilen: In der ersten Episode (Transkriptzeilen 1–13) gibt Kevin ein konkretes Zahlenbeispiel zur Illustration der Aussage der Aufgabe auf dem Interviewbogen an. In Episode 2 (Transkriptzeilen 14–24) versucht Kevin, die Aussage mit Hilfe des Arbeitsmaterials „Plättchen“ zu veranschaulichen. In Episode 3 (Transkriptzeilen 25–55) erfolgt eine Mustererkennung anhand des Arbeitsmaterials „Zahlenstrahl“. In Episode 4 (Transkriptzeilen 56–77) wird das Erkannte mit der symbolischen Sprache erfasst.

Episode 1: Kevin gibt ein konkretes Zahlenbeispiel zur Illustration der Aussage.

Kevin setzt sich nach lautem Vorlesen zunächst mit dem Aufgabentext auseinander. Er scheint in dieser Phase des Textverständnisses (vgl. Stern, 1998, 95) eine Textbasis zu formen und gleichzeitig eine bestimmte Rahmung (s. u.) anzunehmen. Er nennt als Beispiel von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen das Tripel

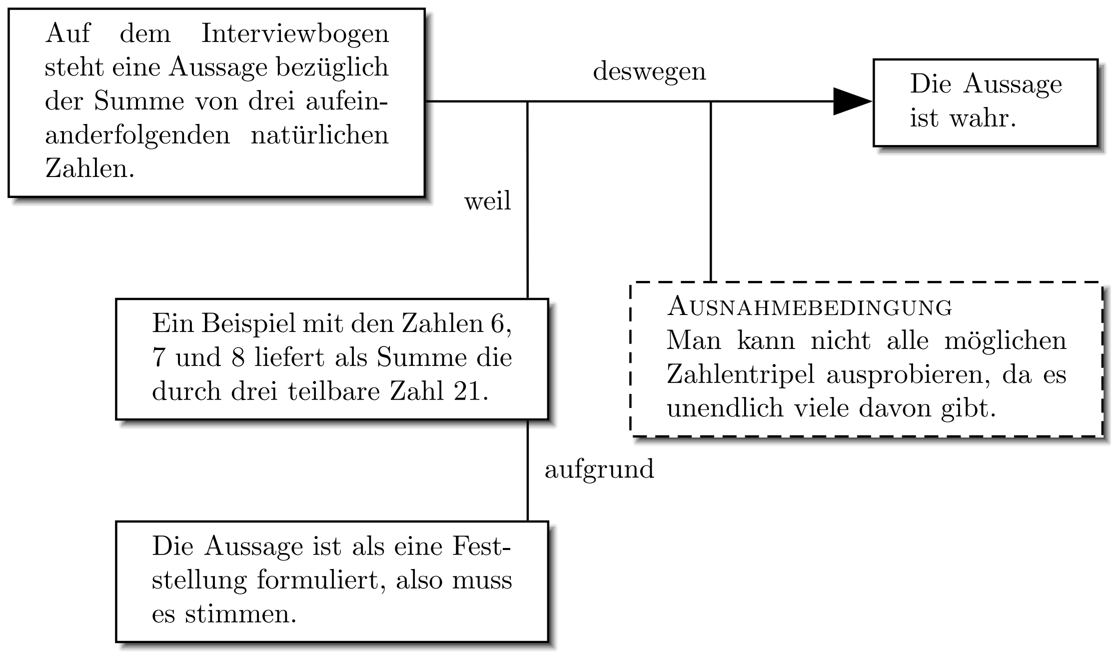
6, 7, 8 und stellt fest, dass die Summe 21 ergibt, welche durch 3 teilbar ist. Somit findet der Schüler heraus, dass die Aussage für dieses Beispiel zutrifft. Bezüglich der Aufgabenstellung macht er folgende Bemerkung:

7 K Das ist ja hier als Feststellung formuliert, also nehm ich mal an, dass das stimmt.

Kevin fasst die Aufgabenformulierung als eine wahre Aussage auf, wobei er seinen Arbeitsauftrag darin sieht, zur Illustration einige Beispiele zu liefern. Der Schüler zeigt jedoch sein Situationsverständnis, indem er auf die Unendlichkeit solcher Zahlen-Beispiele verweist:

13 K Aber wenn wir das doch jetzt mit allen, also mit allen natürlichen Zahlen versuchen würden, dann wären wir ja noch ewig beschäftigt. Also, dann müssten wir ja noch 1, 2, 3; 2, 3, 4 (.) alles Mögliche müssten wir dann ja noch nehmen.

Diese Äußerung Kevins ist deswegen von Interesse, weil der Schüler, obwohl er von der Gültigkeit der „Feststellung“ ausgeht, offensichtlich dennoch Überprüfungsbedarf verspürt, welchen er jedoch nicht erfüllen kann: „dann wären wir ja noch ewig beschäftigt“. Aus der Perspektive der funktionalen Argumentationsanalyse lässt sich diese Äußerung des Kindes im Sinne einer Ausnahmebedingung verstehen. Dementsprechend kann das Argument Kevins wie folgt rekonstruiert werden:



Die Art der Argumentation kann somit als arithmetisch-numerisch, die angenommene Rahmung als Rechen-Rahmung bezeichnet werden.

Episode 2: Veranschaulichung der Aussage mit Plättchen.

Die Interviewerin bietet dem Schüler einen Anlass für weitere Überlegungen, indem sie die nachstehende Frage stellt und zugleich Arbeitsmaterial[3] anbietet. Kevin ist mit diesem Arbeitsmaterial bereits aus dem ersten Interview vertraut.

14	I	Ja, oder geht's vielleicht anders, vielleicht können wir uns überlegen: Stimmt das für alle, ohne alle auszuprobieren?

Mit dieser Fragestellung, die auf die Allgemeingültigkeit der Aussage zielt, fordert die Interviewerin eine neue Argumentation ein. Gleichzeitig kann Kevin das Arbeitsmaterial als Darstellungsmittel nutzen. Somit wird die Situation in eine neue Rahmung gebracht, wobei Kevin mit einem kurzen „Okay, ja" sein Einverständnis dazu gibt. Er greift zunächst nach den quadratischen Plättchen. Während Kevin mit quadratischen Plättchen hantiert und die Darstellung von drei aufeinander folgenden Zahlen in Form einer Treppe legt, deutet er diese Konfiguration geometrisch und betrachtet die Gesamtfläche, die er als „Dreieck" bezeichnet. Dann betrachtet er die Ergänzung dieses „Dreiecks" zu einem „Quadrat":

21	K	Ich hab das jetzt einfach mal ausprobiert, weil ich glaub nämlich, dass die, also wenn man das jetzt so hinlegt, dass dann immer dasselbe noch mal dazu passt, sozusagen.
22	I	Mmh.
23	K	Also, wenn das jetzt hier ein Dreieck wär *(zeigt auf die Plättchen)*, dann könnte man das andere Dreieck da drauf setzen und dann ist es ein Quadrat. Und ich glaub, das hängt irgendwie damit zusammen.

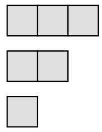
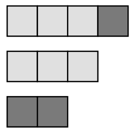
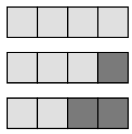
Seine Handlungen, verbalen Äußerungen und die Anordnung der Plättchen auf dem Tisch werden in der Tabelle 4.4 veranschaulicht.[4]

Aufgrund der verbalen Äußerung – „dass dann immer dasselbe nochmal dazupasst", „dann könnte man das andere Dreieck da drauf setzen" – könnte vermutet werden, dass Kevin ein über das spezielle Beispiel hinausgehendes Muster erkennt

[3] bunte quadratische Plättchen, einen leeren Zahlenstrahl, kleine Zettel mit Zahlen von 0 bis 15 sowie den Termen n, $n-1$, $n+1$, $n+2$.

[4] In der Abbildung werden die Plättchen zur Darstellung der Ausgangssituation – z. B. der Zahlen 1, 2, 3 – hellgrau, die aus dem Vorrat der Plättchen auf dem Tisch hinzukommenden Plättchen dunkelgrau abgebildet.

Tabelle 4.4: Kevin verwendet Plättchen

Handlung	Verbale Äußerung	Plättchenlegung
Kevin stellt die Zahlen 1, 2 und 3 durch quadratische Plättchen dar.		
Kevin verschiebt das Plättchen für die 1 zur Darstellung der 2; fügt drei weitere Plättchen dazu, so dass die Zahlen 2, 3 und 4 dargestellt werden.	Ich glaub nämlich, dass die, also wenn man das jetzt so hinlegt, dass dann immer dasselbe noch mal dazu passt, sozusagen.	
Nimmt sich drei neue Plättchen und legt diese an die anderen so an, dass visuell ein Quadrat entsteht.	Also, wenn das jetzt hier ein Dreieck wär, dann könnte man das andere Dreieck da drauf setzen und dann ist es ein Quadrat. Und ich glaub, das hängt irgendwie dann zusammen.	

(„immer“). Jedoch baut er „das andere Dreieck“ jetzt nicht separat auf und setzt es anschließend „da drauf“. Er wählt hier eine Mischform aus Umlegen der ursprünglichen Plättchen und Anlegen von neuen. Diese Ergänzung von drei Plättchen zu einem „Quadrat“ ist ein sehr interessanter und vielversprechender Ansatz. Die Konfiguration, die schließlich ensteht, ist, als reines Plättchenarragement betrachtet, kein Quadrat, sondern ein 3×4 -Rechteck; da die Reihen auseinandergezogen sind, wirkt es optisch wie ein Quadrat. Kevin verfolgt den Ansatz nicht weiter und wendet sich schließlich einem anderen Darstellungskontext zu.

Episode 3: Mustererkennung anhand des Zahlenstrahls.

Nach einer kurzen Überlegung wendet sich Kevin dem Zahlenstrahl zu. Dabei macht er die Entdeckung, dass das Ergebnis der Division durch drei mit dem zweiten Summanden identisch ist:

25 K *(nimmt sich welche von den kleinen Zetteln)* 3 *(legt die 3 an den Zahlenstrahl)* 5 *(legt diese zwei Plätze weiter)* und 4 *(legt diese in die Mitte der beiden anderen Zahlen)* das wären dann 7, 12 (...) 4. *(5 Sek. Pause)* Aah, ich hab schon mal was Neues herausgefunden (..) wenn man 6, 7. Also z. B. hier bei 6, 7 plus 8 *(zeigt auf seine Rechnung)* gleich 21 durch 3 gleich 7, also das ist immer gleich die mittlere Zahl.

26 I Ja.

27 K Also, das hab ich da *(zeigt auf die Zettel mit Zahlen 3, 4 und 5 am Zahlenstrahl)* da war das auch gleich die 4, mmm.

28 I Mmh.

29 K Aber da steht doch eigentlich nirgendwo, dass die natürlichen Zahlen immer in der Reihenfolge ist, dass es, ähm, also 3, 4, 5, dass es immer einen höher geht.

Kevin nimmt mit den Zetteln nicht sofort aufeinander folgende Zahlen im Sinne der Aufgabenstellung auf, sondern beginnt mit 3 und 5, und sortiert die 4 dazwischen ein (das optische Signal des freien Platzes auf dem Zahlenstrahl kann dazu beitragen). Jetzt prüft er weiter die behauptete Teilbarkeit der Summe durch 3 und findet etwas Neues heraus. Er kann nicht nur die Aussage bestätigen, sondern erkennt, dass der Quotient „immer gleich die mittlere Zahl" ist (vgl. Transkriptzeile 25). Die räumliche Anordnung auf dem Zahlenstrahl könnte hier als Stützung und als Formulierungshilfe gedient haben.

Im Verlauf der Aufgabenbearbeitung scheint Kevin sein Verständnis von „aufeinander folgend" in Frage zu stellen. Es könnte bei naiver Betrachtung ja auch „eigentlich" bedeuten, dass es um drei der Größe nach geordnete Zahlen gehen soll. In dieser Szene versucht Kevin offenbar, die Situation im Sinne von Stern (1998, 95) zu mathematisieren und erwirbt hier eine verfeinerte, durch neue Aspekte angereicherte Sichtweise, indem der Begriff „aufeinander folgend" eine neue, strukturelle Bedeutung gewinnt. Diesen hier ablaufenden Prozess nennt Krummheuer (1992) eine *Rahmungsmodulation*: der Schüler verlässt seine arithmetischen Beispiele nicht, modifiziert seine Sichtweise vielmehr, indem er sein altes Wissen neu zu strukturieren versucht. Anscheinend konnte der Zahlenstrahl dem Schüler die Anordnung der aufeinander folgenden Zahlen erst richtig bewusst machen, was zur Modulation seiner bisherigen Rechen-Rahmung zu einer Struktur-Rahmung führte. An dieser Stelle erkennt Kevin Ansätze für ein Prinzip, nämlich dass es in dem betrachteten Zahlentripel von Zahl zur Zahl „immer einen höher geht" (Transkriptzeile 29), welches ihm bei einem späteren Begründungsversuch helfen wird.

Die Interviewerin erklärt dem Kind die Bedeutung des Ausdruckes „aufeinander folgende natürliche Zahlen“ in der vorliegenden Aussage und bekommt eine Bestätigung von Kevin:

30	I	Doch. Die sind aufeinander folgend, also die müssen dann eins höher gehen.
31	K	Okay.

An den Stellen, an denen ein Kind mit seinen Überlegungen fertig geworden war und nicht von sich aus zur Formalisierung kam, war es gemäß der Interviewplanung vorgesehen, die Benutzung der formalen Darstellung der Situation anzubieten. Es war eines der Ziele der Untersuchung, zu beobachten, ob Kinder das Angebot annehmen, und wenn ja, wie sie davon Gebrauch machen würden. So bittet die Interviewerin Kevin, mit einer beliebigen Zahl n am Zahlenstrahl zu arbeiten.

Daraufhin legt Kevin den Zettel mit der Variablen n an die Stelle auf dem Zahlenstrahl, an der zuvor der Zettel mit der Zahl 5 platziert war, nimmt anschließend die Zahlen 4 und 6 von dem Zahlenstrahl weg und beginnnt, in einer Rückwärtsrichtung zu überlegen. Er nimmt n als das Ergebnis an, welches sich ergeben würde, wenn man die Summe durch drei dividierte. Jedoch bleibt er an dieser Stelle auf seine vorherigen konkreten Zahlenbeispiele beschränkt:

39	K	Ja, dann versuchen wir das jetzt mal rückwärts. Dann ist n jetzt (..) mal unser Ergebnis, also das hier *(zeigt auf seine vorherige Rechnung* $6 + 7 + 8 = 21 : 3 = 7$ *auf dem Blatt und umkreist das Ergebnis 7).* Und dann rechnen wir das also mal (...) mal 3 *(flüstert unverständlich)* 5 als Beispiel nehmen, mal 3 sind 15, und dann müssen wir 15 jetzt in drei aufeinander folgende natürliche Zahlen zerlegen. Also 15 gleich *(schreibt* $15 =$ *auf)* was könnte man denn da nehmen? *(9 Sek. Pause) (flüstert unverständlich, schreibt zunächst* $5 + 6 + 7$ *auf, streicht dies dann durch und schreibt* $4 + 5 + 6$*)* Mit der 15, das lässt sich zerlegen in 4 plus 5 plus 6. Also kann man es auch rückwärts machen.

In seinem Wortbeitrag bezieht sich Kevin zunächst auf das Beispiel mit der Summe 21 und dem Divisionsergebnis 7. Er weiß, dass er diese Zahl mit drei multiplizieren soll, um die von ihm gesuchte Summe zu erhalten. In seinen Erläuterungen geht Kevin jedoch von dem Divisionsergebnis 5 aus und gelangt zur 15 als Summe der gesuchten Summanden. Es könnte sein, dass ihm der Versuch mit der 7 zu offensichtlich ist, weil ja schon alles da steht, und dass er deshalb zu einer anderen Testzahl übergeht. Vermutlich nimmt der Schüler die Zahl 5 aber deswegen als

Ausgangszahl, weil er zuvor den Zettel mit der Zahl 5 auf dem Zahlenstrahl durch n ersetzt hatte. Kevin zerlegt dann die Zahl 15 in drei Summanden. Seine Äußerung „was könnte man denn da nehmen?“ (Transkriptzeile 39) sowie die Tatsache, dass er zunächst die falschen Summanden – nämlich 5, 6 und 7 – aufschreibt, weisen darauf hin, dass der Schüler diese Zahlen durch Ausprobieren gefunden hat und dass seine eigenen vorher angestellten Überlegungen bezüglich der Beziehungen zwischen diesen Summanden hier nicht mit eingeflossen sind. Auch auf Nachfrage der Interviewerin hin, warum er ausgerechnet diese Zahlen genommen habe, antwortet Kevin:

53	K	Es müssen ja drei aufeinander folgende Zahlen sein, deswegen muss man sich die dann suchen, aber das kann man ja schlecht in einer Formel ausdrücken.
54	I	Aber wie sucht man diese Zahlen? Erklär mal.
55	K	Ja, also ich habs jetzt durch Ausprobieren, aber (..) Die mittlere Zahl ist immer, wenn man das direkt durch 3 teilen müsste, und dann immer von, also die rechte Zahl ist dann immer der Nach, der Nachfolger und die linke Zahl ist der Vorgänger, aber wie man das jetzt ausdrücken soll, das weiß ich nicht.

In der Transkriptzeile 55 bestätigt Kevin somit die zuvor durch die Interviewerin aufgestellte Vermutung, dass er die einzelnen Summander des Ergebnisses 15 durch Ausprobieren gefunden hatte. Der Sprachgebrauch von der „rechten“ und der „linken“ Zahl könnte ein Indiz sein, dass für Kevin im Moment die durch den Zahlenstrahl gegebene räumliche Orientierung im Vordergrund steht und die zuvor gewonnene Einsicht, dass es immer um eins mehr wird, überlagert wird.

Diese skizzierte Szene ist von immenser Bedeutung für das Verstehen des Entwicklungsprozesses des algebraischen Denkens. Denn hier wird eine Hürde offenbar, die bei Formalisierungen oft übersehen wird. Im Prinzip bringt Kevin alle Voraussetzungen mit, um einen solchen Formalisierungsschritt machen zu können: Das Situationsverständnis ist vorhanden, das erkannte Prinzip wird unter Verwendung von Fachausdrücken beschrieben, auch liegen bereits die Kärtchen mit den Termen n, $n+1$ und $n-1$ vor ihm auf dem Tisch. Anscheinend reicht dies trotzdem nicht aus, um das Erkannte selbständig in die algebraische Formelsprache zu übersetzen.

Episode 4: Erfassung des Erkannten mit symbolischer Sprache.

Der Schritt zur formalisierten Darstellung gelingt Kevin erst, nachdem die Interviewerin ihn nach dem Nachfolger von n fragt. Hier kann Kevin vollkommen sicher

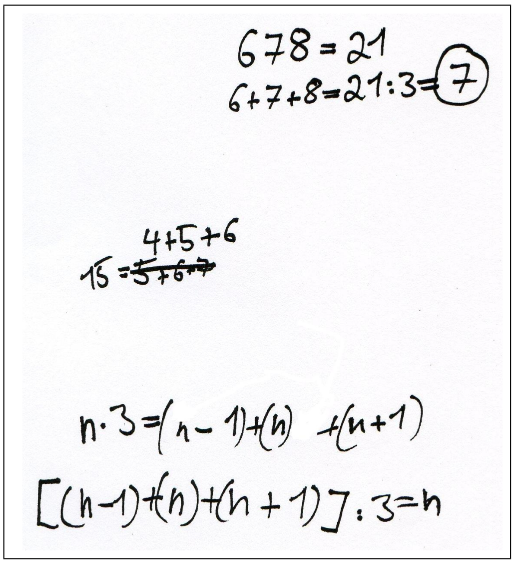


Abbildung 4.11: Aufgabe ZAHLENSUMME: Kevins Lösung

und ohne Denkpausen den Term $n + 1$ als Nachfolger von n benennen, geht sogar einen Schritt weiter und bennent $n - 1$ von sich aus als Vorgänger. Dabei kommt der Zahlenstrahl erneut als Darstellungsmittel zur Anwendung. Schließlich verschriftlicht Kevin seine Erkenntnis in formaler Darstellung:

57	K	Dann schreiben wir gleich n minus 1 plus n plus, nein plus n plus n plus 1 *(schreibt dabei $n - 1 + n + n + 1$)*, also n mal drei gleich n minus 1 plus n plus n plus 1. Aber das würde ich dann einklammern, also n und n plus 1 *(klammert jeweils $n - 1$, n und $n + 1$ ein)*.
58	I	Und stimmt das, dass das n mal 3 wird, wenn wir alle diese drei Zahlen addieren?

Die Tatsache, dass Kevin die einzelnen Terme auch noch einklammert (Abb. 4.11), könnte Indiz für seine Deutung der Terme als Stellvertreter für Zahlen sein, die in einer Systematik von einer beliebigen natürlichen Zahl n abhängig sind. Die Frage (vgl. Transkriptzeile 58), ob die aufgestellte Formel $n{\cdot}3 = (n{-}1){+}(n){+}(n{+}1)$ auch stimmig sei, beantwortet der Schüler im Rahmen seines Verständnisses der Aufgabenstellung wie folgt:

65	K	Ja, weil es eigentlich so ist, wie es da steht *(zeigt auf die Aufgabenstellung)*.

Kevin ist offenbar immer noch davon überzeugt, dass die in der Aufgabenstellung formulierte Festellung (vgl. Transkriptzeile 7) richtig und hier lediglich eine

Übersetzung in die formale Sprache gefordert ist. Als die Interviewerin auf die Notwendigkeit einer Begründung für die Richtigkeit der Aussage in der Aufgabenstellung hinweist, macht der Schüler den folgenden Vorschlag:

67 K Ja, man könnte da ja jetzt die Umkehrformel machen. Also, der Gegensatz.

Er notiert dabei die Gleichung $[(n-1)+(n)+(n+1)] : 3 = n$ (Abb. 4.11). Für Kevin scheint es offensichtlich zu sein, dass die Summe seiner einzelnen Terme durch drei teilbar sein muss, mit dem Ergebnis n. In seiner „Umkehrformel" verwendet er die einzelnen Terme als formale Darstellung für drei nacheinander folgende Zahlen und sieht an dieser Stelle – dies erscheint auch seiner Wahrnehmung der Aufgabenstellung entsprechend sehr authentisch – keinen Begründungsbedarf.

Auf die Bemerkung der Interviewerin, dass die in der Aufgabenstellung formulierte Aussage nur eine Behauptung sei, reagiert der Schüler wie folgt:

75 K Aber wenn man eigentlich testen müsste, ob ne Formel so ist, wie man sie hingeschrieben hat, dann müsste man es ja eigentlich bei allen ausprobieren, weil (..) , oder gibt es eine Formel zur Überprüfung von Formeln?

Gesamtschau: Charakteristika von Kevins Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe ZAHLENSUMME

Kevin nimmt zunächst eine *Rechen-Rahmung* an, indem er von Anfang an von der Richtigkeit der Aussage ausgeht und ein konkretes Zahlenbeispiel als Illustration anführt. Mit der Aufgabe konfrontiert, die Aussage zu begründen, kommt es bei Kevin zu einer Rahmungsmodulation; er wechselt von der *Rechen-* zu einer *Struktur-Rahmung*. Kevin erkennt mit Hilfe der visuellen Darstellung am Zahlenstrahl eine Gesetzmäßigkeit darin, dass bei der Division der Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen durch 3 stets die mittlere Zahl des entsprechenden Zahlentripels das Ergebnis bildet. Die inhärente Struktur eines Zahlentripels von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen beschreibt Kevin unter Verwendung der Begriffe *Vorgänger* und *Nachfolger* und stellt seine Erkenntnisse mit algebraischen Mitteln formal dar. Kevin löst die Aufgabe somit innerhalb der von ihm erst angenommenen und später modifizierten Rahmung durch eine algebraische Darstellung in Form einer Gleichung. Die Art seiner Argumentation wechselt von einer *arithmetisch-numerischen* zu einer *algebraischen*.

Kevin verfügt über eine durchaus faszinierende mathematische Flexibilität, die sich in den von ihm verwendeten unterschiedlichen Darstellungsformen wie Plättchen, Zahlenstrahl, Symbole, etc. und seinen Ideen bei der Auseinandersetzung mit dem vorgegebenen mathematischen Problem, z. B. es „mal rückwärts zu versuchen“, wiederfinden lässt.

Zusätzlich weist er eine ausgeprägte Fähigkeit zum begrifflichen Formulieren auf, da er eine differenzierte mathematische Wortwahl anwendet und mit Begriffen wie z. B. „zerlegen“ arbeitet.

Der Schüler antizipiert interessante Konfigurationen und experimentiert mit diesen, wobei er eine Grundhaltung zu verfolgen scheint, die etwa besagt: In der Mathematik hängen markante Phänomene miteinander zusammen. Dies alles lässt erkennen, dass er bereits über einen ausgeprägten mathematischen Blick zu verfügen scheint.

4.1.3.2 Laura

Die Interviewsequenz mit der Bearbeitung der Aufgabe ZAHLENSUMME umfasst bei Laura 13 Minuten und lässt sich in drei Episoden einteilen. In Episode 1 (Transkriptzeilen 1–5) überprüft Laura systematisch einige konkrete Zahlentripel. In Episode 2 (Transkriptzeilen 6–27) versucht sie, die Allgemeingültigkeit der Aussage anhand des Arbeitsmaterials der Plättchen zu belegen. In Episode 3 (Transkriptzeilen 28–52) versucht sich Laura an der Formalisierung ihrer Erkenntnisse.

Episode 1: Überprüfung der Aussage an konkreten Zahlenbeispielen

Zunächst überprüft Laura die Aussage, dass die Summe von drei nacheinander folgenden natürlichen Zahlen durch drei teilbar ist, an einigen konkreten Zahlenbeispielen:

1	L	Okay, dann mach ich das jetzt mal mit einem Beispiel (schreibt 1+2+3=6) sind 6 und die 6 kann man durch teilen, die kann man durch 3 teilen, das sind dann 2.
2	I	Mmh.
3	L	Okay, dann würd ich (*schreibt* $2+3+4=9$) sind 9, geht auch, dann 4 plus 5 plus 6 (..) sind 15 (*schreibt* $4+5+6=15$), das geht auch. Könnte das dann vielleicht gehen, dass dann alle Zahlen gehen, wenn man immer so

weiter geht, also wenn dann 5 plus 6 plus 7, das sind dann, schreib ich kurz auf (*schreibt* $5+6+7=18$) 18, das sind 18 und dann geht das durch 3, ja geht. Dann müssten eigentlich alle Zahlen gehen, dann versuch ich jetzt mal höhere Zahlen. 11 plus 12 plus 13 (*schreibt* $11+12+13$ *als neue Spalte auf, rechnet und flüstert*) 35 müsste auch gehen.

4 I 11, 12 und 13 (..)

5 L Ähm, ja, 36 (*schreibt 36*). Ja, es müssten eigentlich dann alle Zahlen gehen, denke ich, wenn ich mir das ansehe.

Bei der Überprüfung geht Laura systematisch – beginnend mit dem Zahlentripel 1, 2, 3 – vor und stellt fest, dass alle ihre Ergebnisse durch drei teilbar sind. Bereits nach drei erfolgreichen Beispielen stellt Laura die Hypothese auf, dass die Aussage auf dem Interviewbogen allgemeingültig sei. Zur Überprüfung ihrer aufgestellten Hypothese führt Laura zwei weitere erfolgreiche konkrete Zahlenbeispiele an (vgl. Transkriptzeile 3). Sie hält die Aussage auf dem Interviewbogen für bestätigt und ist offenbar bereit, an die Allgemeingültigkeit der Aussage zu glauben (vgl. Transkriptzeile 5).

Episode 2: Laura experimentiert mit den Arbeitsmaterialien

Nachdem die Interviewerin Laura die Anschauungshilfen in Form der Quadratplättchen aus Plastik, der Zettel mit Zahlen und Termen, sowie den Zahlenstrahl auf den Tisch legt, greift Laura nach drei Zahlenbeispielen 5, 6 und 7 und legt diese Zettel an den Zahlenstrahl.

7 L Mmm (*18 Sek. Pause, L greift nach drei Zetteln mit Zahlen 5, 6 und 7 und legt diese an den Zahlenstrahl)* Dann leg ich jetzt mal ein Beispiel. Und wenn man die plus nimmt, dann ist das durch 3 teilbar.

8 I Ja.

9 L Mmm, jetzt leg ich mal, dann leg ich am besten noch mal (*legt neben die 5, 6, 7 eine aus den Zettelchen mit 1 und 8 zusammengesetzte Zahl 18 an den Zahlenstrahl. Wobei sie die Zahlenkarten in die Intervalle und nicht auf die Punkte legt.)* Mmm.

Bemerkenswert ist hierbei, dass Laura die Zahlenkarten nicht auf die Striche des unbeschrifteten Zahlenstrahls legt, sondern unterhalb des Zahlenstrahls zwischen den Skalierungen anordnet. Ferner legt die Schülerin die Zahlenkärtchen 1 und 8 zusammen neben der Zahl 7 an den Zahlenstrahl, sodass sie das Ergebnis der

Addition von 5+6+7 = 18 ergeben. Die Schülerin wählt intuitiv richtig drei aufeinander folgende Zahlen aus, scheint sich jedoch des Musters nicht bewusst zu sein, dass die Abstände zwischen den Zahlen jeweils gleich 1 sind. Laura benutzt den Zahlenstrahl auf ihre eigene Weise, legt nur ihre Beispielaufgabe daran, ohne die Abstände zwischen den einzelnen Zahlen untereinander und dem Ergebnis zu beachten. Gerade diesen Vorgang erwähnt Freudenthal bei der Beschreibung typischer Fehler bei der Verwendung der Zahlengerade als Veranschaulichungsmaterial. Zu den bekannten Fehlern, die Kinder bei dem Gebrauch eines Zahlenstrahls machen, zählt laut Freudenthal die Platzierung der Zahlen „genau in der Mitte zwischen den Teilpunkten“ zur Nummerierung der Intervalle (vgl. Freudenthal, 1977, 230f.).

Nachdem Laura die Bedeutung der beiden nebeneinander an den Zahlenstrahl gelegten Kärtchen 1 und 8 als Darstellung der Summe 18 des Zahlentripels 5, 6, 7 erklärt hat, stellt sich Laura selbst die Frage nach der Möglichkeit einer Verallgemeinerung der Aufgabenaussage:

15	L	Mmm (*6 Sek. Pause*). Könnte es bei allen sein? *(4 Sek. Pause)*
16	I	Also, die Frage ist, warum sollte es bei allen so sein, muss sogar irgendwie, oder?
17	L	Vielleicht weil das immer drei Zahlen sind die immer, weil es immer drei von diesen Zahlen sind zusammen und (..) auf jeden Fall es könnte sein, weil es drei Zahlen sind, weil wenn es vier sind, dann glaub ich geht das nicht.
18	I	Das wissen wir nicht. Wir bleiben bei drei erst mal.

Lauras nächste Vermutung ist, dass das Ergebnis durch drei teilbar sein muss, da immer genau drei Zahlen addiert werden (vgl. Transkriptzeitle 17). Mit mehr als drei Summanden, so Laura, wäre die Rechnung nicht möglich. Da sie ihre Zahlentripel systematisch auswählt, gewinnt Laura die Erkenntnis, dass die ausgerechneten Summen sich jeweils um drei erhöhen und somit eine Dreierreihe bilden:

19	L	Ja, es könnte auch sein, weil alle Zahlen, wenn man die addiert, die sind dann sozusagen immer im Dreierabstand. 6, 9, 15 und 18 *(zeigt auf ihre vorherigen Rechnungen)* sind immer im Dreierabstand.
20	I	Ja.
21	L	Ich hätte jetzt, naja ich weiß nicht so genau, auf jeden Fall sind das, das hat alles irgendwie mit drei zu tun. Also das sind drei Zahlen in einer Reihe sag ich mal, und diese Ergebnisse haben immer einen Dreierabstand, die sind durch drei teilbar.

Nachdem Laura ihre vielen Beobachtungen zwar verbal ausdrücken und beschreiben, jedoch offensichtlich nicht erklären kann, lenkt die Interviewerin Lauras

Aufmerksamkeit auf die auf dem Tisch liegenden quadratischen Plättchen. Laura versucht nun mit den Plättchen, den „Dreierabstand“ der Ergebnisse (vgl. Transkriptzeile 21) zu belegen:

25	L	*(Greift nach den Plättchen und legt drei Gruppen auf den Tisch: eine Gruppe mit einem, die andere mit zwei und die letzte mit drei Plättchen.)* So, 1, 2 und 3, *(zählt die Plättchen durch)* sind 6 zusammen und die geht durch 3. Wenn man jetzt die Quadrate alle zusammen nimmt, dann sind das 6 Stück *(schiebt alle 6 Plättchen zu einer 6er-Gruppe zusammen)*. Mmm, 2, 3 und dann die 4 *(legt die Plättchen der 6er-Gruppe so um, dass 3 Gruppen entstehen: eine mit zwei, eine mit drei Plättchen und eine Gruppe mit dem übrig gebliebenen sechsten Plättchen. Holt drei neue Plättchen aus dem Vorrat und legt diese zu dem letzten Plättchen dazu, sodass eine Gruppe aus 4 Plättchen entsteht.)* Und wenn man das jetzt bei den Quadraten sieht, hat es wieder, also weil wenn man zuerst 1, dann 2, dann 3 nimmt. *(zieht die einzelnen Plättchen wieder auseinander und zur Ausgangsdarstellung der 1, 2 und 3 zusammen; hat am Schluss die zuvor neu hinzugekommenen drei Plättchen übrig und schiebt diese drei zur Seite.)* Hier die 3 Quadrate *(zeigt auf die beiseite geschobenen drei Plättchen)*, bis zur nächsten Zahl, könnte sein, dass man sozusagen, halt deswegen, weil man immer 3 dazuzählen muss. Wenn man an die letzte Zahl und an die vordere (..) Wenn man jetzt Quadrate hat, tut man einen dazu *(Schiebt von der zweiten Gruppe, bestehend aus zwei Plättchen, ein Plättchen zur ersten Gruppe. Nun liegen in der ersten Gruppe zwei Plättchen nebeneinander und in der zweiten Gruppe ist nur ein Plättchen übrig)*, an die zweite zwei *(trennt von der dritten Gruppe, bestehend aus drei Plättchen, zwei Plättchen ab und schiebt sie an die zweite Gruppe. Nun liegen in der zweiten Gruppe drei und in der dritten Gruppe ein Plättchen.)* und an die letzte führt man dann drei dran. *(Legt an die dritte Gruppe, bestehend aus einem Plättchen, drei neue Plättchen aus dem Vorrat hinzu. Nun liegen in der dritten Gruppe vier Plättchen nebeneinander. Die drei Gruppen stellen nun wieder die Zahlen 2, 3 und 4 dar.)* Dann kommt man auf das nächste.
26	I	Interessant. Und wie geht es weiter?

27 L Weiter geht es, dann muss man noch mal einen *(schiebt ein Plättchen aus der zweiten Gruppe, bestehend aus drei Plättchen, an die beiden Plättchen der ersten Gruppe)* dann hat man hier vorne drei. Dann muss man da noch einen dazutun *(fügt zu der zweiten Gruppe ein Plättchen aus der dritten Gruppe, bestehend aus vier Plättchen, hinzu)*, dann hat man da drei, dann muss man da zwei dazu tun *(fügt der zweiten Figur ein weiteres Plättchen aus der dritten Gruppe hinzu; nun bleiben in der letzten Gruppe nur noch zwei Plättchen übrig)* und dann muss man wieder drei nehmen und da dran tun sozusagen *(fügt der dritten Gruppe drei neue Plättchen aus dem Vorrat hinzu)*.

Der vorstehende Wortbeitrag in der Transkriptzeile 25 erfordert zur Verständlichmachung einer ausführlichen Rekonstruktion anhand der Tabelle 4.7. Darin wird der Beitrag der Schülerin in sechs Schritte untergliedert und ihre Äußerungen den jeweiligen Handlungen gegenüber gestellt. An jeden der Schritte schließt sich eine bildliche Darstellung der jeweiligen Anordnung der Plättchen an, sowie Lauras Schiebetechnik.

In ihren Überlegungen schafft es Laura beinahe, den Sachverhalt mit Hilfe einer vollständigen Induktion zu beweisen. Dabei wechselt sie stets zwischen einem arithmetisch-numerischen und einem enaktiven gegenständlichen Zugang hin und her.

In Schritt 1 legt Laura das erste mit den Plättchen darstellbare Zahlentripel 1, 2, 3 auf den Tisch und stellt nach dem Abzählen der einzelnen Plättchen fest, dass die Anzahl der Plättchen die Zahl 6 ergibt. Laura ruft ihren Wissensstand ab und teilt mit, dass 6 durch 3 teilbar ist. Damit wird ein Induktionsanfang vollzogen.

In Schritt 2 veranschaulicht sie dieses Ergebnis auf gegenständlicher Ebene, indem sie die drei Gruppen der Plättchen zusammenschiebt und als „sechs Stück“ bezeichnet.

In Schritt 3 geht Laura durch Um- und Hinzulegen von Plättchen zu dem nächsten möglichen Zahlentripel 2, 3, 4 über. Dazu benötigt die Schülerin drei neue Plättchen aus dem auf dem Tisch liegenden Vorrat.

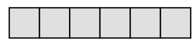
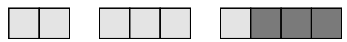
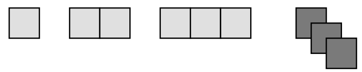
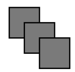
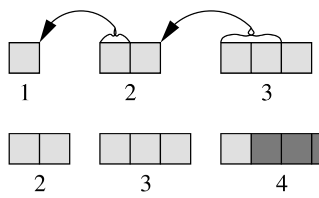
In Schritt 4 vergewissert sich Laura durch Wiederherstellung der Ausgangsdarstellung des Zahlentripels 1, 2, 3, dass der Übergang von einem zum nächstmöglichen Zahlentripel das Hinzufügen von drei neuen Plättchen erfordert.

In Schritt 5 verdeutlicht Laura durch explizites Zeigen auf die drei in Schritt 4 beiseite geschobenen Plättchen, dass der Abstand zwischen zwei Summen von nacheinander folgenden Zahlentripeln 3 beträgt. Dies verbalisiert Laura durch „die drei Quadrate bis zur nächsten Zahl“ und zeigt damit ihre Flexibilität hinsichtlich des Umgangs mit unterschiedlichen Darstellungsmitteln (Zahlen und Plättchen). Dabei erfolgt implizit die erste Demonstration des Induktionsschrittes: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und 3 kommt dazu, dann ist die nächste Zahl auch durch 3 teilbar.

Lauras Legetechnik in Schritt 6 kann am ehesten in Form eines *Flußdiagramms* nachvollzogen werden. Laura kommt enaktiv zu einem allgemeinen Algorithmus: Man kommt mit drei zusätzlichen Plättchen mit einer internen Verschiebung zur nächsten Zahl. Mit der „nächsten Zahl“ meint Laura die Summe des nachfolgenden Zahlentripels.

Die Verschiebung ist ein wichtiger Teil in Lauras Überlegungen, wird von ihr jedoch nicht näher erklärt. In der Bearbeitung der Aufgabe beobachtet Laura zwei miteinander verbundenen Veränderungsbereiche: zum einen die interne Umlegung innerhalb eines Zahlentripels, zum anderen die Umlegung von einem Zahlentripel zum nächstfolgenden. Diese Umlegungen sind deswegen möglich, weil von der zweiten Zahl des Zahlentripels die 1 und von der dritten Zahl die 2 *abgesplittet* werden können. Durch diese *Absplitterung* und das *Dazulegen* zur vorangehenden Zahl erhält man die ersten zwei Zahlen des nächsten Zahlentripels, das durch *Dranhängen* der Zahl 3 vervollständigt wird. Anschließend (Transkriptzeile 27) verwendet Laura „noch mal“ ihre Schiebetechnik, indem sie durch den Schritt von dem Zahlentripel 2, 3, 4 zum nächsten Zahlentripel 3, 4, 5 die zweite Demonstration des Induktionsschrittes vollzieht.

Tabelle 4.7: Laura verwendet Plättchen

	Handlung	Verbale Äußerung	Plättchenlegung
1	Laura stellt das Zahlentrippel 1, 2, 3 mit drei Gruppen von nebeneinander auf dem Tisch liegenden Plättchen dar. Zählt alle Plättchen durch.	So, 1, 2 und 3, sind 6 zusammen und die geht durch drei.	
2	Laura schiebt alle Plättchen zu einer 6er-Gruppe aneinander.	Wenn man jetzt die Quadrate alle zusammen nimmt, dann sind das 6 Stück.	
3	Laura trennt von der 6er-Gruppe zunächst 2, dann 3 Plättchen ab. Zu dem zuletzt übrig gebliebenen Plättchen fügt sie drei neue Plättchen aus dem Vorrat hinzu. Im Ergebnis liegen drei Gruppen von Plättchen nebeneinander, die die Zahlen 2, 3 und 4 darstellen.	Mmm, 2, 3 und dann die 4.	
4	Laura zieht die einzelnen Plättchen wieder auseinander und zur Ausgangsdarstellung der Zahlen 1, 2 und 3 zusammen; hat am Schluss die zuvor neu hinzugekommenen drei Plättchen übrig und schiebt diese zur Seite.	Und wenn man das jetzt bei den Quadraten sieht, hat es wieder, also weil wenn man zuerst 1, dann 2, dann 3 nimmt, ...	
5	Laura zeigt auf die drei beiseite geschobenen Plättchen.	...hier die 3 Quadrate, bis zur nächsten Zahl, könnte sein, dass man sozusagen, halt deswegen, weil man immer 3 dazuzählen muss.	
6	Laura schiebt ein Plättchen aus der zweiten Gruppe zur ersten Gruppe. Somit liegen in der ersten Gruppe zwei Plättchen und in der zweiten Gruppe ist ein Plättchen übrig. Dann trennt sie von der dritten Gruppe, bestehend aus drei Plättchen, zwei Plättchen ab und schiebt diese an die zweite Gruppe. Schließlich legt sie an die dritte Gruppe die drei neuen Plättchen aus dem Vorrat hinzu. In der dritten Gruppe befinden sich somit vier Plättchen.	Wenn man jetzt Quadrate hat, tut man einen dazu, an die zweite zwei und an die letzte führt man dann drei dran, dann kommt man auf das nächste.	

Episode 3: Laura beschäftigt sich mit einer formalen Darstellung

Aufgefordert, ihre Vorgehensweise unter Verwendung der Variablen n allgemein zu formulieren, beginnt Laura mit der Nachbildung ihrer Legetechnik in einer formalen Darstellung. Sie schreibt die Terme $n+1$, $n+2$ und $n+3$ nieder (Abb. 4.12); in dieser Wahl der Darstellung scheint Algorithmus „plus 1, plus 2, plus 3“ eine noch genauer zu klärende Rolle zu spielen.

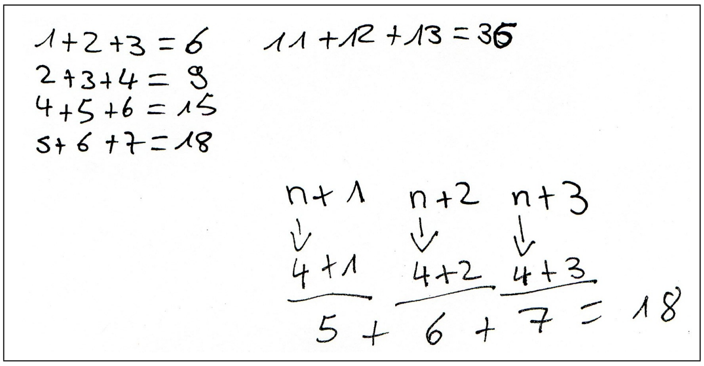


Abbildung 4.12: Aufgabe ZAHLENSUMME: Lauras Lösung

Im folgenden Wortbeitrag verdeutlicht die Schülerin ihre Sinnzuschreibung zu dem Notierten:

35	L	Ähm, also fang ich jetzt mal mit 5 an, dann hat man die, n ist dann die 4, von dem letzten.
36	I	Schreib das auf, also wenn du möchtest kann ich dir die farbigen Stifte geben (gibt L farbige Stifte).
37	L	Also n, dann mach ich einen Pfeil nach unten, ist 4 (*schreibt einen Pfeil sowie* $4+1$ *und, durch einen Querstrich abgetrennt, 5 unter den Term* $n+1$) sind 5. Dann n ist da dann auch die 4 plus 2 sind 6 (*schreibt einen Pfeil sowie* $4+2$ *und 6 unter den Term* $n+2$*)*. Und hier ist meinetwegen n ist auch 4 plus 3 (*schreibt einen Pfeil sowie* $4+3$ *und 7 unter den Term* $n+3$) ist 7 und die muss man dann plus rechnen (*schreibt* $5+6+7=18$*)* da kommt da dann 18 raus.

Anscheinend tastet sich Laura an die Bedeutung des verwendeten n mit Hilfe eines konkreten Zahlenbeispieles heran. Sie geht von der Zahl 5 als erster Zahl des Zahlentripels 5, 6, 7 aus. Um beim Term $n+1$ den Wert 5 zu erhalten, muss man für n die Zahl 4 einsetzen. Dies verdeutlicht Laura durch ihre Äußerung „n ist 4“. Ihr zweiter Term $n+2$ muss den Wert 6 ergeben, da die Zahl 6 der Nachfolger der Zahl 5 ist. Durch die Aussage „Dann n ist da dann auch die 4“ wird deutlich, dass

Laura in der Variable n nicht ohne weiteres stets den gleichen Wert sieht. Vielmehr rechnet sie diesen dadurch aus, dass sie von dem jeweiligen Ergebnis ausgeht. Daher ist es für Laura eine überraschende Erkenntnis, dass n auch in dem Term $n+2$ den Wert 4 einnimmt. Diese Interpretation findet ihre Bestätigung in der darauf folgenden Äußerung bei dem Term $n+3$: „Und hier ist meinetwegen n ist auch 4“. Vermutlich bedeutete n für Laura ursprünglich eine in drei Positionen eines Zahlentripels unterschiedliche Zahl. Die Addition von jeweils 1, 2 und 3 spiegelt demnach die Handlung *Dazulegen* von einem, zwei und drei Plättchen zu den drei aufeinander folgenden Zahlen wider. Die durchgeführte interne Verschiebung von Plättchen findet bei der Formalisierung keine explizite Darstellung.

Die Frage der Interviewerin nach der Möglichkeit der Addition der drei Terme $n+1$, $n+2$ und $n+3$ beantwortet Laura mit:

40	I	Wie wird das funktionieren mit n plus 1 plus n plus 2 plus n plus 3, wenn wir das zusammenaddieren? Was käme dann raus? Können wir das addieren? Irgendwie?
41	L	Wie, zusammenbringen so?
42	I	Ja.
43	L	Ähm, mmm, könnte vielleicht das in Klammern n plus 1 plus, also Klammer zu, plus in Klammern n plus 1 und dann könnte man es auch mit ner eckigen Klammer machen.
44	I	Ja, kann man machen. Aber wenn du so addierst, kannst du hier was zusammenzählen?
45	L	Ja, diese beiden und die kann ich auch zusammenzählen (*zeigt auf die Zeile mit nebeneinander stehenden* $n+1$, $n+2$ und $n+3$).
46	I	Was kommt raus?
47	L	Ähm, 3, sag ich mal $n3$, ich weiß jetzt nicht genau, wie man mit n rechnet, dann müsste jetzt, wenn ich das, 3 vielleicht, man weiß ja nicht, welche Zahl das ist, bei n, das ist das Problem.

Interessant ist hier, dass Laura für das Operieren mit Termen zunächst die Vokabel „zusammenbringen“ verwendet (Transkriptzeile 41), sich somit eine Addition der Terme nicht vorstellen kann. Erst im Laufe des Interviews, anscheinend durch Einbringen der Bezeichnungen „zusammenaddieren“ und „zusammenzählen“ in Bezug auf Terme durch die Interviewerin, ändert sich anscheinend diesbezüglich Lauras Sicht. Laura leuchtet ein, dass sie zwischen den einzelnen Termen das Operationszeichen „+“ setzen kann (Abb. 4.13).

Trotz der Tatsache, dass Laura sich nun die Addition der Terme vorstellen

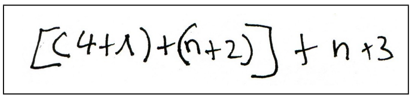


Abbildung 4.13: Aufgabe ZAHLENSUMME: Lauras Darstellung

kann, ist ihr die Durchführung der Operation selbst nicht klar: „man weiß ja nicht, welche Zahl das ist, bei n, das ist das Problem“ (Transkriptzeile 47). Die Schülerin hält immer noch an der Vorstellung fest, dass n in den Termen unterschiedliche Zahlenwerte einnehmen kann. Um ihr Vorstellung zu erleichtern, schlägt die Interviewerin Laura vor, für n die konkrete Zahl 4 zu nehmen. Daraufhin äußert sich Laura wie folgt:

> 51 L Dann würde ich eine eckige Klammer, dann ne runde, dann würde ich hier 4 plus 1, runde Klammer zu, und das dann plus n, ach, ja oder? Ja, in Klammer n plus 2, Klammer zu, eckige Klammer zu und das dann noch plus n plus 3 *(schreibt dabei* $[(4+1)+(n+2)]+n+3$*)*.

Durch Verwendung von runden und eckigen Klammern macht Laura einerseits deutlich, dass sie diese drei Terme als eigenständige Objekte betrachtet. Andererseits setzt sie lediglich die ersten beiden Terme in eckige Klammern und zeigt somit auch die Reihenfolge ihrer Operation. Zuerst werden die Terme $4+1$ und $n+2$ addiert; zu dessen Ergebnis wird anschließend der Term $n+3$ hinzugezählt. Die Tatsache, dass Laura im ersten Summanden die vorgeschlagene konkrete Zahl 4 und in den anderen beiden Termen das n verwendet, lässt unterschiedliche Interpretationen zu. Zum einen kann Laura lediglich ein Flüchtigkeitsfehler in ihrer Notation unterlaufen sein, indem sie statt n die Zahl 4 niederschrieb. Wahrscheinlicher jedoch ist, dass Laura im ersten Term statt n die Zahl 4 einsetzt, aber nicht weiß, welche Werte n in den beiden anderen Termen annehmen könnte. Der Gedanke, dass n in allen drei Termen eine unbekannte, aber die gleiche Zahl repräsentiert, ist Laura fremd.

Gesamtschau: Charakteristika von Lauras Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe ZAHLENSUMME

Rückblickend betrachtet kann bei Laura von Anfang an ein systemataisches Vorgehen festgestellt werden. Sie überprüft konkrete Zahlenbeispiele, beginnend mit dem Zahlentripel 1, 2, 3, schreibt diese untereinander nieder und gewinnt durch die Betrachtung ihrer Ergebnisse die Erkenntnis, dass alle Summen durch 3 teilbar sind und in einem Dreierabstand zueinander stehen. Die Schülerin stellt eine Hypothese von der Allgemeingültigkeit der Aussage auf und belegt diese, während sie innerhalb der angenommenen *Struktur-Rahmung* stets zwischen einer arithmetisch-numerischen und einer enaktiven gegenständlichen Darstellung wechselt.

Bei dem Übergang zur formal-symbolischen Beschreibung reproduziert Laura ihre Schiebetechnik. Sie gelangt zu einer algebraischen Darstellung mit der Erstellung der Summe dreier Terme, die in Lauras Vorstellung drei aufeinander folgende Zahlen repräsentieren. Die Rekonstruktion von Lauras Vorgehen zeigt, dass es ihr einerseits an der Erkenntnis fehlt, dass eine Operation mit Termen ebenso wie eine Operation mit konkreten Zahlen möglich ist. Andererseits weist Laura einen nicht vollends ausgeprägten *Symbolsinn* auf: die Variable n erhält durch Lauras Sinnzuschreibung in ein und demselben Kontext unterschiedliche Zahlenwerte. Zwar hat Laura in dem speziellen konkreten Fall (zu ihren Erstaunen) festgestellt, dass n hier immer denselben Wert 4 hat, aber vermutlich hat sie nicht den Grund verstanden, dass das in allen Fällen so sein muss.

Die Art ihrer Argumentation kann bei dieser Aufgabe als *prä-algebraisch* bezeichnet werden.

4.1.3.3 Michael

Die Interviewsequenz der Aufgabe ZAHLENSUMME nahm bei Michael ca. 13 Minuten in Anspruch; die Bearbeitung dieser Aufgabe lässt sich in zwei Episoden einteilen. In Episode 1 (Transkriptzeilen 1–33 bis „das reicht") wählt Michael aus den auf dem Tisch liegenden Zahlenkärtchen diejenigen aus, die seiner Meinung nach die Aussage bestätigen. In Episode 2 (Transkriptzeilen 34–72) sucht Michael nach Gegenbeispielen, um die Aussage zu widerlegen. Schließlich nimmt Michael dazu Stellung, dass ihm nichts zur allgemeinen Darstellung der Aussage einfällt.

Episode 1: Suche nach passenden Beispielen

Michael werden zeitgleich die Aufgabe auf dem Interviewbogen und das Arbeitsmaterial (Zahlenstrahl samt Zetteln mit Zahlen und Termen, sowie quadratische Plättchen) vorgelegt. Es entsteht der Eindruck, dass Michael die Aufgabenstellung als eine Aufforderung deutet, aus den vorgegebenen Zahlen diejenigen auszusuchen, die die Anforderungen der Aussage erfüllen. So überprüft der Schüler verschiedene Zahlentripel auf die Teilbarkeit ihrer Summen durch drei, indem er die Zettel mit den Zahlen aus dem Zettelvorrat auf dem Tisch auswählt. Allerdings legt er je drei Zettel nebeneinander auf den Tisch, ohne den Zahlenstrahl zu benutzen. Erfüllt das Zahlentripel die Aussage, schreibt Michael seine Rechenoperation auf (Abb. 4.14) und geht zur Suche nach dem nächsten Beispiel über.

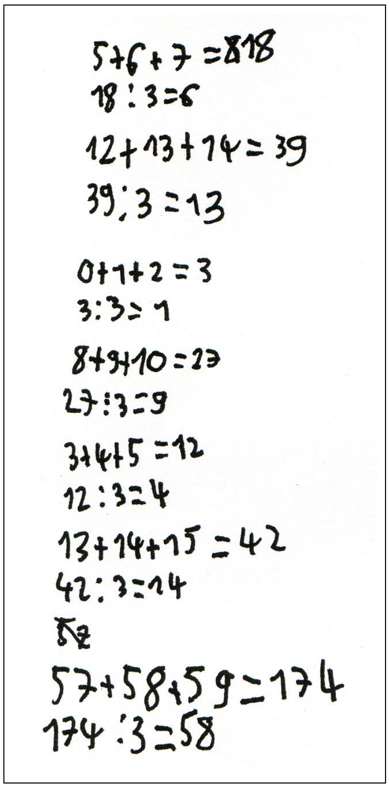


Abbildung 4.14: Aufgabe ZAHLENSUMME: Michaels Lösung

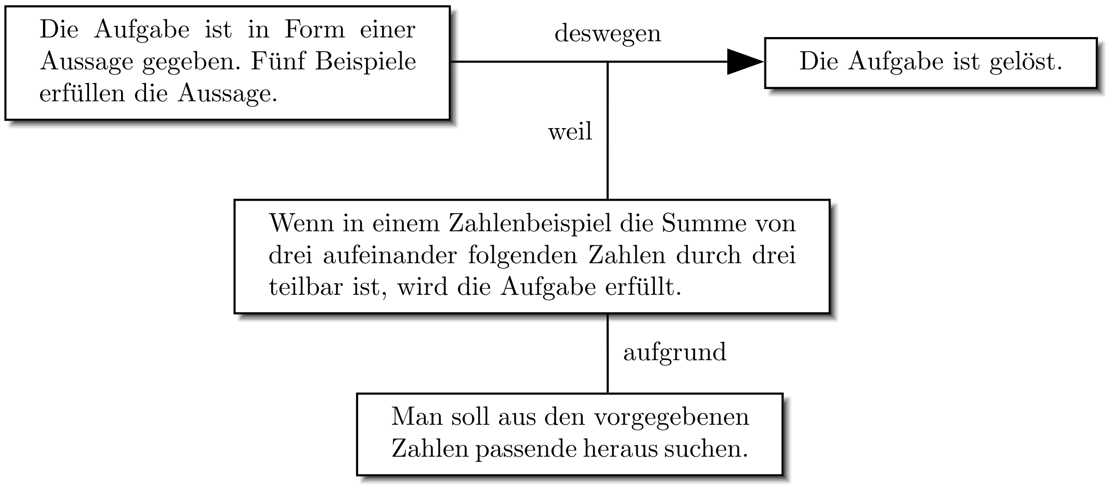
Auf den ersten Blick scheinen die Beispiele zufällig ausgewählt zu sein; bei näherer Betrachtung allerdings lässt sich eine gewisse Strukturierung erkennen. Die Untersuchung erfolgt stichprobenartig, indem Michael zunächst drei einstellige (Zahlentripel 5, 6, 7), dann drei zweistellige Zahlen (Zahlentripel 12, 13, 14) und anschließend ein Tripel mit der Zahl Null (Zahlentripel 0, 1, 2) überprüft. Die Tatsache, dass alle bisherigen Ergebnisse die Aussage der Aufgabe belegen, scheint Michael etwas zu irritieren. Er überprüft zwei weitere Beispiele (Zahlentripel 8, 9, 10 und 3, 4, 5;) und verkündet:

31 M Ja, ich glaub das reicht, oder?

Durch diesen Wortbeitrag kann die Michael zuvor unterstellte Rechen-Rahmung der Situation – „Suche Beispiele aus dem Angebot“ – als bestätigt angesehen werden. Um sich ihrer Interpretation zu vergewissern, fragt die Interviewerin dennoch nach:

32 I Wofür reicht das?
33 M Also, die Aufgaben.

Michaels Reaktion auf die Nachfrage weist darauf hin, dass der Schüler diese nicht als Anzweiflung der von ihm eingenommenen Rechen-Rahmung deutet, sondern rein verfahrenstechnisch interpretiert. Dementsprechend kann mit Toulmin folgendes Argument rekonstruiert werden:



An dieser Stelle scheint die Bearbeitung der Aufgabe für Michael beendet zu sein, da er aus den vorgelegten Zetteln viele richtige Zahlenbeispiele gefunden hatte.

Episode 2: Suche nach Gegenbeispielen

Nachdem der Schüler die Aufgabe als erledigt erachtet, stellt die Interviewerin den Bezug zur Allgemeingültigkeit her:

34 I Mmh, und was meinst du, funktioniert das immer so, bei drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen?
35 M Also, bei jeder nicht.

Michael scheint hier davon überzeugt zu sein, dass die auf dem Blatt stehende Formulierung im Allgemeinfall nicht stimmen kann und zeigt eine bemerkenswerte Zielstrebigkeit in seinem Bemühen, den Satz zu widerlegen. Er begibt sich auf die Suche nach Gegenbeispielen:

41	M	Ja *(schreibt* $13 + 14 + 15 = 42$*,* $42 : 3 = 14$*)*, geht. Vielleicht klappt das bei 9, 10 und 11 nicht *(legt 9, 10 und 11 nebeneinander)*. 19 (..) Oh, das geht auch, das geht ja irgendwie alles! 8, 9, 10. 17, nee die hatte ich ja schon. Vielleicht nehm ich mal die 1, 2, 3. *(legt die 1, 2 und 3 nebeneinander)*. Sind (.) ja, das geht auch. Das ist unfair! *(legt 3, 4 und 5 aneinander)* 7. Nein, das geht auch!
42	I	Wieso sagtest du unfair? Willst du, dass es nicht funktioniert?
43	M	Ja, das ist, das geht irgendwie so gut wie bei jeder Zahl. Ich glaub sogar, dass das bei jeder geht. Vielleicht, wenn man jetzt mal 57 (..) plus 58 und dann plus 59.

Erst nach vier Biespielen macht sich durch die Äußerung „das geht irgendwie so gut wie bei jeder Zahl“ (Transkriptzeile 43) die erste Unsicherheit des Schülers bemerkbar, die in eine neu gewonnene Vermutung „Ich glaub sogar, dass das bei jeder geht“ (Transkriptzeile 43) übergeht. Als letzten Versuch bildet Michael die Summe von drei, im Gegensatz zu den vorherigen Zahlenbeispielen deutlich höheren, Zahlen, die nicht als Zettel zur Veranschaulichung vorlagen(Zahlentripel 57, 58, 59). Michael berechnet das Ergebnis der Division durch drei (vgl. die letzen zwei Zeilen der Abb. 4.14)und stellt fest:

65	M	Also mein ich, das geht doch mit jeder Zahl.

Allerdings kommt Michael bei der Frage der Interviewerin, ob er diese Allgemeingültigkeit – auch unter Verwendung der vorhandenen Arbeitsmaterialien – begründen kann, in Erklärungsnot:

68	M	Wie kann man das machen? *(30 Sek. Pause)* Mir fällt nichts ein, wie man das machen kann.

Mit dieser Aussage bringt Michael zum Ausdruck, dass er keine weitere Möglichkeit sieht, an die Aufgabe heranzugehen, als konkrete Beispiele anzuführen. Mit den Darstellungsmitteln der Terme, des Zahlenstrahls und der Plättchen kann der Schüler nichts anfangen.

Gesamtschau: Charakteristika von Michaels Vorgehensweise bei der Bearbeitung der Aufgabe ZAHLENSUMME

Während der ganzen Bearbeitungszeit bleibt Michael in seiner anfangs eingenommenen *Rechen-Rahmung*. Er wählt aus dem vorhandenen Arbeitsmaterial einige konkrete Zahlentripel als Beispiele zur Unterstützung der vorgelegten These aus und geht dabei systematisch vor. Michael behauptet jedoch zunächst, dass die Aussage nicht allgemeingültig sein kann. Gründe für seine Behauptung liefert er nicht. Erst nach elf überprüften (schriftlichen und mündlichen) Beispielen nimmt der Schüler von seiner primären Überzeugung Abstand. Hervorzuheben ist, dass Michael sich bei seinen Ausführungen ausschließlich zweier Darstellungsmöglichkeiten bedient: der verbalen Äußerung und der Verschriftlichung seiner Rechenschritte. Da der Schüler die innere Strukturierung in der Aufgabensituation nicht entdeckt, bleiben ihm die daraus zu gewinnenden Erkenntnisse verborgen.

4.1.3.4 Vergleichende Analyse der Fallstudien

Die Einzelfallstudien werden hier verglichen im dem Hinblick auf die angenommenen Rahmungen, die verwendeten Arbeitsmaterialien, sowie Argumentationstypen.

Kevin ist von Anfang an von der Richtigkeit der Aussage in der Aufgabe überzeugt, da sie als Feststellung formuliert ist. Er agiert zunächst in einer *Rechen-Rahmung* und liefert ein konkretes illustrierendes Beispiel. Aus seiner Sicht ist jede weitere Illustration überflüssig, da ihm bewusst ist, dass es unendlich viele Beispiele gibt. Eine Überprüfung der Aussage kommt für ihn nicht in Frage. Kevin gewinnt anhand des Zahlenstrahls die Erkenntnis, dass die Division der Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen durch 3 stets die mittlere Zahl des ursprünglichen Zahlentripels zum Ergebnis hat. An dieser Stelle ist eine Rahmungsmodulation hin zu einer *Struktur-Rahmung* zu beobachten. Zugleich kann Kevin seine Erkenntnis verbal und formal unter Verwendung von Variablen festhalten.

Laura scheint gleich an der Überprüfung der Aussage interessiert zu sein und geht dabei systematisch vor, indem sie chronologisch mehrere Zahlentripel kontrolliert. Sie erkennt das Muster, dass die von ihr gebildeten Summen der einzelnen Zahlen der Zahlentripel in Dreierabständen zueinander folgen. Laura geht selbständig an die Frage der Allgemeingültigkeit heran und stellt die Hypothese auf, dass diese gegeben ist. Laura agiert innerhalb ihrer *Struktur-Rahmung* induktiv mit quadratischen Plättchen, indem sie durch Um-, Dazulegen und Verschieben der Plättchen die Allgemeingültigkeit der Aussage belegt.

Michael versteht die Aufgabe dahingehend, dass er aus dem Pool der konkreten, auf dem Tisch liegenden Zahlen passende Beispiele zur Untermauerung der Aussage finden soll. Nach Auffinden einiger passender Beispiele meint er, seine Aufgabe erledigt zu haben. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit der Aussage verneint Michael jedoch. Er begibt sich zielstrebig auf die Suche nach Gegenbeispielen, die die Aussage falsifizieren. Dabei verfolgt der Schüler seine eigene Systematik, indem er zunächst einige einstellige und dann zweistellige Zahlen überprüft. Nach einigen wenigen erfolglosen Versuchen gibt Michael auf und glaubt nun, dass die Aussage allgemein ist. Jedoch findet er keine Erklärung für dieses Phänomen und geht nicht auf den Vorschlag ein, den Sachverhalt anhand von Arbeitsmaterialien als Repräsentationsmittel näher zu untersuchen.

Kevin geht strukturell an die Aufgabe heran, die Art seiner Argumente ist dabei zunächst *arithmetisch-numerisch*, nach Modulation seiner Rahmung jedoch *algebraisch*. Laura wählt einen strukturellen Zugang zur ZAHLENSUMME, wobei ihre Argumentation als *prä-algebraisch* beschrieben werden kann. Michaels Zugang zur Aufgabe ist durch seine *Rechen-Rahmung* geprägt, die Art seiner Argumentation ist dabei *arithmetisch-numerisch*.

In dem vollkommen neuen Kontext der Aufgabe ZAHLENSUMME nehmen die drei Kinder unterschiedliche Rahmungen an. Somit wird die Frage nach der Allgemeingültigkeit der Aussage aus drei unterschiedlichen Perspektiven angegangen. Alle drei Probanden nehmen Arbeitsmaterialien zur Darstellung der Situation zu Hilfe, allerdings verschiedene. Den Schritt zur Formalisierung bewältigt Kevin erfolgreich, wohingegen Laura ihre Schwierigkeiten damit hat und Michael ganz scheitert.

4.2 Vergleichende Analysen zur gesamten Stichprobe

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die Fallstudien in Bezug auf drei ausgewählte Probanden ausführlich analysiert wurden, befasst sich der folgende Abschnitt mit den Aufgabenbearbeitungen aller an der Interviewserie II teilgenommenen Probanden. Dabei werden vor allem schriftliche Notationen der Kinder, die charakteristischen Vorgehensweisen sowie Herausforderungen beim symbolischen Beschreiben vergleichend angegangen.

4.2.1 Analysen zur Aufgabe KREISE

Tabelle der Notation

Bei der Bearbeitung der Aufgabe brachten die Kinder unterschiedliche Typen von Argumenten vor und hielten ihre Überlegungen schriftlich fest. Die Tabelle 4.8 zeigt einen Überblick über die Notation aller Probanden. Diese erstrecken sich von numerischen Notationen – wie bei Eva zu finden – über synkopische, bei denen Zeichen und Abkürzungen verwendet werden – siehe Torsten und Max – bis hin zu rein symbolischen Notationen wie die von Verena und Andreas.

Vorgehensweisen

Bei der Bearbeitung der Aufgabe haben sich zwei deutlich erkennbare Lösungsmuster gezeigt, die auf einer dynamischen bzw. statischen Sichtweise basieren.

Bei einer dynamischen Betrachtung wird in einer Figurenfolge ein Veränderungsmuster erkannt, indem von einer Figur zur nächsten ein bestimmtes Baumodul dazu kommt (Abb. 4.15). In Abbildung 4.16 ist die Veranschaulichung dieses Vorgehens dargestellt.

Bei einer statischen Auffasung der Figurenfolge wird ein Strukturmuster einer Figur der Figurenfolge in Betracht gezogen. Die Form und der Zusammenbau dieser Figur wiederholt sich in allen Figuren der Folge, z. B. in der dritten Figur (Abb. 4.17).

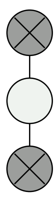


Abbildung 4.15: Aufgabe KREISE: Baumodul

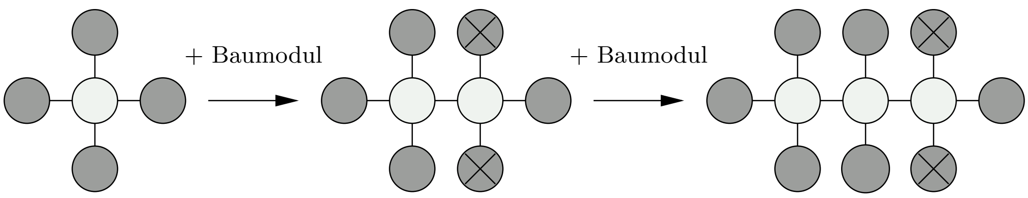


Abbildung 4.16: Aufgabe KREISE: Erzeugung der nächsten Figur der Figurenfolge

Tabelle 4.8: Aufgabe KREISE – Vergleich: Notation

Schule	Kind	Gelb	Blau	Insgesamt
G1-de	Kevin	$n \cdot 1$	$n \cdot 2 + 2$	$n \cdot 3 + 2$
G1-de	Verena	n	$n + n + 2$	$n + n + n + 2$
G1-de	Dennis	$n = n$	$n + 2$	$n + n$
G1-de	Torsten	n	$n+ \ =$ blau	gelb + blau
G1-de	Michael	$n + 0$	$n \cdot 2 + 2$	$n - 2 + 2$
G1-de	Laura	$n + 0$	$n \cdot 2 + 2$	$n \cdot 3 + 2$
				$2 \cdot n + (2 + 0)$
G2-de	Jessica	n	$n + n + 2 = n$	n
G2-de	Angela	n	$n \cdot 2 + 2$	–
G2-de	Leonie	n	oben n, rechts 1	$n + n = n$
			unten n, links 1	$n + n = n$
			n	$n + 2 = n$
G2-de	Petra	2000	6000	8000
G2-de	Eva	10	22	32
G2-de	Sabine	n	Die Zahl vor n ist eins weniger, die Zahl nach n ist eins mehr	–
G3-ru	Tina	n	$n + 2$	–
G3-ru	Katrin	n	$n \cdot 2 + 2$	$n + n \cdot 2 + 2$
				$n \cdot 3 + 2$
G3-ru	Lena	n	$n \cdot 2 + 2$	$n \cdot 3 + 2$
G3-ru	Nikita	n	$4 + (n - 1) \cdot 2$	$n + (4 + (n - 1) \cdot 2)$
				$5 + (n - 1) \cdot 3$
G3-ru	Jan	n	$4 + (n - 1) \cdot 2$	$4 + (2n - 1) \cdot 2$
				$5 + (n - 1) \cdot 3$
G3-ru	Peter	n	$n + 2$	–
G4-ru	Nina	n	$4 + 2 \cdot (n - 1)$	$5 + 3 \cdot (n - 1)$
G4-ru	Roman	$n + 1$	$n + 2$	$n + 3$
G4-ru	Max	N Figur	N F.$\cdot 2 + 2$	N F.$+N$ F.$\cdot 2 + 2$
		n		
G4-ru	Andreas	n	$n \cdot 2 + 2$	$n \cdot 3 + 2$
G4-ru	Julia	n	$n + 2 + n$	–
G4-ru	Olga	$n + 0$	$n + n + 2$	$n + n + n + 2$

G1 - Gymnasium 1; G2 - Gymnasium 2; G3 - Gymnasium 3; G4 - Gymnasium 4;
de - Deutschland; ru - Russland

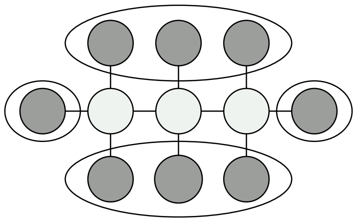


Abbildung 4.17: Aufgabe KREISE: Struktur einer Figur der Figurenfolge

Tabelle 4.9: Aufgabe KREISE: Abzählstrategien der Schüler

Abzählstrategien		**Term**
1	**Herangehensweise aus statischer Sicht**	
1.1	**Kind betrachtet die Kreise pro Reihe:**	
	Zählt die drei Reihen von Kreisen und dann die beiden Kreise an den Enden	$n + n + n + 2$
	Zählt die drei Reihen gebündelt und dann die beiden Kreise an den Enden	$n \cdot 3 + 2$
	Addiert „gelb“ und „blau“	$n + n \cdot 2 + 2$
1.2	**Kind betrachtet die Kreise pro Spalte:**	
	Zählt die Kreise spaltenweise und dann die beiden Kreise an den Enden	$n \cdot 3 + 2$
2	**Herangehensweise aus dynamischer Sicht** **Kind erkennt die Veränderung:**	
	Zeigt, welche Kreise von einer Figur zur nächsten hinzukommen	$5 + 3 \cdot (n - 1)$ $5 + (n - 1) \cdot 3$
	Addiert „gelb“ und „blau“	$n + (4 + (n - 1) \cdot 2)$

Wir gehen diese zwei Sichtweisen differenzierter an, indem wir systematisch die Schritte der Kinder von der Betrachtung der Figurenfolge bis zur formalen Beschreibung verfolgen.

Aufbauend auf den gewonnenen Daten wollen wir anhand der Aufgabe KREISE herausfinden, wo die Hürden der Kinder auf dem Weg von der Musterbetrachtung über die Mustererkennung bis hin zur Mustererfassung liegen und gegebenenfalls analysieren, um welche Hürden es sich konkret handelt.

Im Rahmen der gemachten Untersuchungen konnten vier verschiedene Wege rekonstruiert werden, wie Kinder die Zahlenfolge von der Figurenfolge ableiten.

Das nachstehende Diagramm 4.18 führt diese beobachteten Wege anhand der Bestimmung der Anzahl der blauen Kreise an.

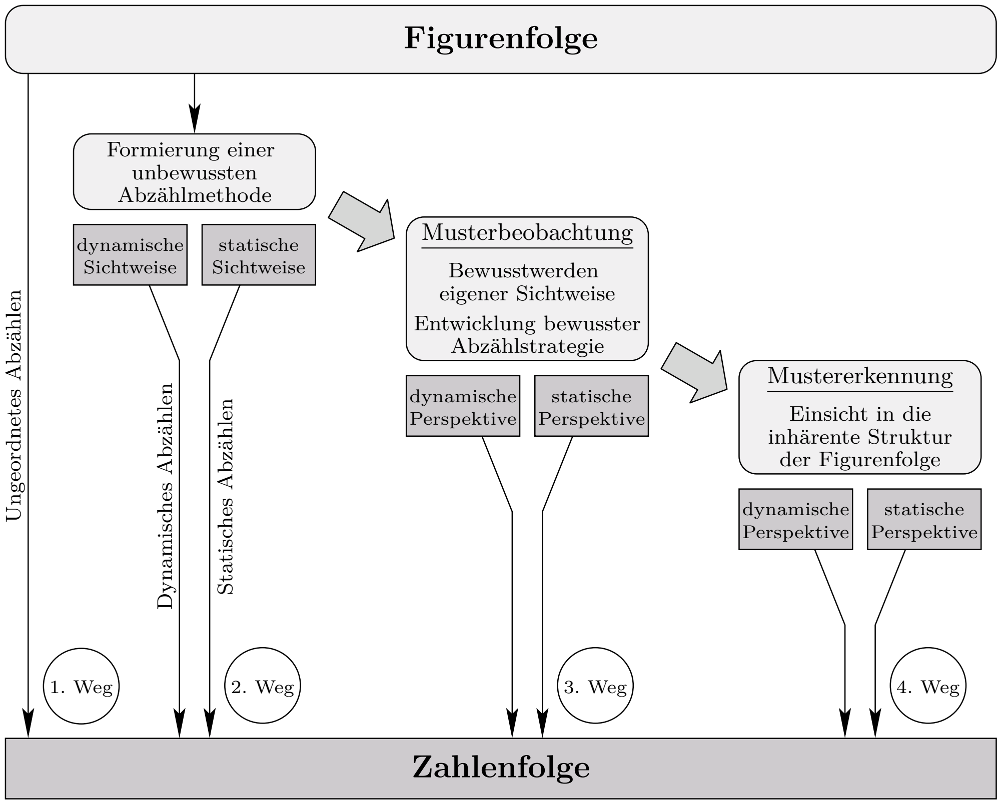


Abbildung 4.18: Wege von Figurenfolge zur Zahlenfolge

Einer der beobachteten Wege ist es, die Figurenfolge zu betrachten und die blauen Kreise der drei abgebildeten Figuren ungeordnet, ohne jeglich erkennbares Prinzips abzuzählen. Ein weiterer Weg erzeugt die Zahlenfolge über die Formierung einer bestimmten Abzählmethode, die durch eine der beiden unbewussten Sichtweisen – statisch oder dynamisch – gekennzeichnet ist. Ein dritter Weg ist, sich der eigenen Sichtweise bewusst zu werden, diese damit zu einer Perspektive zu machen, und aus einer unbewussten Abzählmethode eine bewusste Abzählstrategie zu entwickeln. Dass die Inhärenz im Aufbau der Figurenfolge verstanden und demzufolge das Vertrauen in eigener Abzählstrategie gewonnen wird, kennzeichnet einen vierten Weg. Schauen wir uns nun diese Wege einzeln an:

Auf dem ersten Weg wird das Bestimmen der Anzahlen an Kreisen als nicht zusammenhängende Aufgaben angesehen. Somit entsteht die Zahlenfolge „4, 6, 8“ für die ersten drei Glieder der Figurenfolge als Ergebnis des ungeordneten Abzählens.

Dieses Vorgehen ist ein Beispiel für das Agieren innerhalb einer Rechen-Rahmung, wo der Fokus des Kindes im Herausfinden von konkreten Quantitäten liegt. Für die Kinder, die diesen – sehr kurzen – Weg gehen, bleibt die innere Struktur der Bildfolge verborgen, was ein unüberwindbares Hindernis auf dem Weg zur Mustererfassung darstellt.

Im zweiten Weg betrachtet das Kind die Figurenfolge und nimmt unbewusst eine bestimmte Sichtweise ein. Auf den ersten Blick unterscheidet sich dieser Weg kaum von dem ersten, da das Kind ebenso innerhalb einer Rechen-Rahmung agiert. Doch formiert sich aufgrund dieser Sichtweise eine unbewusste, allerdings durch Zeigetechnik während des Abzählens erkennbare Abzählmethode. Diese Abzählmethode kann dynamischer oder aber statischer Natur sein. Das dynamische Vorgehen macht sich durch rhythmische Handbewegungen erkennbar, während das Kind ein Hinzukommen zweier neuer Kreise von einer Figur zu der nächsten beobachtet. Das Kind nimmt eine Figur als ein Ganzes war und sieht, dass jeweils zwei blaue Kreise hinzukommen. Die erzeugte Zahlenfolge „4, 6, 8“ weist ein mit dem Veränderungsprinzip der Bildfolge „Zuwachs um zwei blaue Kreise“ konformes Veränderungsprinzip „Zuwachs um 2“ auf. Die statische Vorgehensweise ist dadurch gekennzeichnet, dass das Kind eine Figur in einzelne Teile gliedert und bei der jeweiligen Figur die blauen Kreise in der Weise abzählt, dass es zunächst die Kreise oberhalb der gelben Kreise, dann unterhalb und schließlich die blauen Kreise an den Enden zählt. In der dadurch erzeugten Zahlenfolge „4, 6, 8“ erkennt das Kind das Veränderungsmuster „Zuwachs um 2“. Dies führt jedoch zu einem inneren Konflikt, da das Strukturmuster der Bildfolge nicht mit dem Veränderungsmuster der Zahlenfolge konform ist. In der Zahlenfolge erkennt das Kind zwar die Veränderung „Zuwachs um 2“, kann dieses Muster jedoch nicht erklären, da es die Ursache der Veränderung nicht sieht.

Der dritte Weg von der Figuren- zur Zahlenfolge durchläuft im Gegensatz zum zweiten Weg einen Schritt des Bewusstwerdens der eigenen statischen bzw. dynamischen Sichtweise, wodurch diese zu einer bewusst angenommenen statischen bzw. dynamischen Perspektive wird. Die dynamische Perspektive ist durch die Betrachtung der Veränderung – Hinzukommen des Baumoduls „1 gelber Kreis und zwei damit verbundene blaue Kreise oben und unten“ – von einer Figur zur nächsten gekennzeichnet. Hier beobachtet das Kind ein Veränderungsmuster in der Figurenfolge und eine unbewusste dynamische Abzählmethode entwickelt sich zu einer bewussten dynamischen Abzählstrategie. Mit dieser Strategie kann das Kind das bemerkte Prinzip auf weitere Glieder der Figurenfolge übertragen. Unter der statischen Perspektive beobachtet das Kind ein Strukturmuster in der Bildfolge und stellt fest, dass die blauen Kreise der drei abgebildeten Figuren jeweils in die oberen, unteren und seitlichen unterteilt werden können. Dadurch entwickelt sich eine unbewusste statische Abzählmethode zu einer bewussten statischen Abzählstrategie, die das Kind auf weitere Figuren übertragen kann. Jedoch kann hier das beobachtete Prinzip noch nicht verallgemeinert werden, da dem Kind eine Garantie für das sichere Funktionieren der eigenen Abzählstrategie fehlt und die Frage „Warum ist es so?“ nicht beantwortet werden kann. Das bedeutet, dass ein inniger Zusammenhang zwischen der entwickelten Abzählstrategie und der Figurenfolge als Träger bestimmter Eigenschaft noch nicht erfasst wird.

Der vierte Weg umfasst einen weiteren Schritt von Musterbeobachtung zur Mustererkennung, indem das Kind die Inhärenz zwischen seiner Abzählstrategie und dem Aufbau der Figurenfolge feststellt. Kinder mit dynamischem Vorgehen werden sich ihre Vorgehensweise durch die Eigenschaft der vorliegenden Figurenfolge erklären und können ihre Erkenntnis, dass von Figur zu Figur jeweils ein Baumodul mit einem gelben und zwei blauen Kreisen hinzukommt, verallgemeinern. Hier wird ein Zusammenhang zwischen der Anzahl an dazukommenden Baumodulen und der Figurennummer festgestellt. In der statischen Vorgehensweise erkennt das Kind bei der Betrachtung der Bildfolge, dass die Figuren einen identischen Aufbau haben. Die Anzahl der blauen Kreise oben und unten hängt von der Anzahl der gelben Kreise in der Mitte ab. Die beiden blauen Kreise an den Enden bleiben bei allen Figuren konstant. Diese Strukturierung kann das Kind an jeder beliebigen Figur der Bildfolge vornehmen, da die Anzahl an blauen Kreisen von der Anzahl an gelben Kreisen abgeleitet wird. Kinder beider Strategien gewinnen Vertrauen in die eigene Vorgehensweise, da sie Einsicht in die inhärente Struktur der Figurenfolge gewinnen. Die damit einhergehende Erfassung des Struktur- bzw. Veränderungsmusters beeinflusst die Erzeugung der Zahlenfolge insofern, dass die Zahlenfolge die Ergebnisse des strategischen Abzählens widerspiegelt:

Figur	Dynamische Perspektive	Statische Perspektive
1.	4	$1 + 1 + 2$
2.	$4 + 2$	$2 + 2 + 2$
3.	$4 + 2 + 2$	$3 + 3 + 2$

Demzufolge erscheint hier die Zahlenfolge im Gegensatz zu allen drei anderen Wegen in einer der entwickelten Abzählstrategie wiedergegebenen Form, was die nächsten Schritte zur symbolischen Darstellung ermöglicht.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass nur durch das Bewusstwerden der eigenen Vorgehensweise sowie der Einsicht in die Struktur der Figurenfolge das Muster auch in der Zahlenfolge erkannt werden kann. Dies ist aber Voraussetzung für das Erstellen des allgemeinen Terms.

Herausforderungen beim symbolischen Beschreiben

Anhand des repräsentativ für zahlreiche andere Probanden stehenden Fallbeispiels der Schülerin Leonie und ihre Formalisierungsversuche bei der Bearbeitung der Aufgabe KREISE wird die signifikante Hürde zur symbolischen Beschreiben detailliert erläutert.

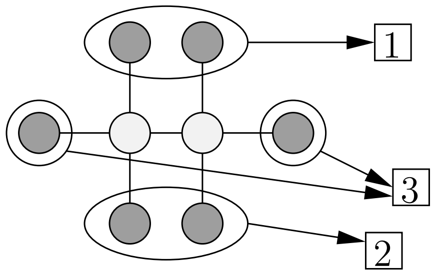
Leonie bearbeitet die Aufgabe KREISE

Leonies Zählstrategie gestaltet sich beim Ausfüllen aller drei Tabellenzeilen ähnlich. Zunächst zählt sie die Anzahl der Kreise an den drei visuell vorhandenen Figuren der Figurenfolge ab. Sie strukturiert die Anordnung der Kreise bereits ab der Figur zwei und benötigt scheinbar das tatsächliche Abzählen, um zu konkreten Ergebnissen zu kommen. Durch das strukturierte Zählen und einer systematischen Betrachtung der Figuren kommt Leonie zur Mustererkennung, entwickelt eine geeignete Zählstrategie und kann bei der Nachfrage, wie sie auf die Gesamtanzahl der Kreise der dritten Figur kommt, ihre Vorgehensweise deutlich erklären:

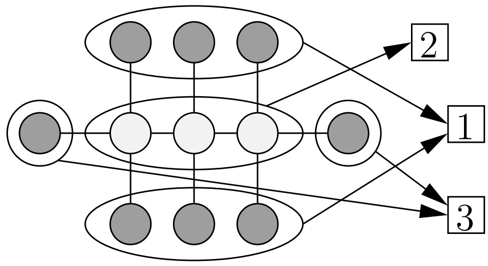
> 76 L Also dann sind oben drei, unten drei, in der Mitte drei und rechts und links zwei, also rechts einer und links einer.

Figurennummer	1	2	3	4	…	n	…	7	…	50
Anzahl der gelben Kreise	1	2	3	4		n		7		50
Anzahl der blauen Kreise	4	6	8	10		oben n rechts 1 unten n links 1 n		7+7+2 = 16		50+50=100 100+2=102
Anzahl der Kreise insgesamt	5	8	11	14		n+n=n n+n=n n+2=n		7+7=14 14+7=21 21+2=23		50+50=100 100+50=150 150+2=152

Abbildung 4.19: Aufgabe KREISE: Leonies Lösung



(a) Anzahl der gelben Kreise



(b) Anzahl der blauen Kreise

Abbildung 4.20: Leonies Zählstrategie zur Aufgabe KREISE

Es fällt auf, dass Leonie in ihrer Strukturierung eine statische Sicht – eine Momentanaufnahme – auf die Figuren einnimmt, indem sie jede Figur einzeln betrachtet und in zwei Teile zerlegt (Abb. 4.20). Dabei unterscheidet sie zwischen dem Teil von zwei immer konstant bleibenden Kreisen an den Enden und dem variablen mittleren Teil einer Figur, der von der Figurennummer abhängig ist. Diesen variablen Teil erfasst Leonie als bestehend aus drei Reihen von Kreisen, wobei die Anzahl der Kreise in jede Reihe mit der Figurennummer übereinstimmt. Sie zieht Rückschlüsse auf die Allgemeingültigkeit ihrer Zählweise und kann diese auf jede weitere – auch nicht mehr bildhaft dargestellte – Figur anwenden. Mit dem Vertrauen in das Funktionieren ihrer Strategie ermittelt sie problemlos die Anzahl der Kreise für die größeren Zahlen 7 und 50, obwohl ihr dazu keine Abbildungen vorliegen. Sie gliedert die Figur 7 in obere und untere, dann in mittlere und anschließend in die rechten und linken Kreise. Dieses Muster erfasst sie in einzelnen dazugehörigen Rechenschritten, die ihre Strukturierung erneut verdeutlichen: sie addiert zunächst die oberen und unteren sieben Kreise. Als nächster Rechenschritt folgt die Addition der mittleren Reihe. Anschließend werden die zwei Randkreise dazu addiert (Abb. 4.20). Ebenso verfährt sie für die Ermittlung der Gesamtanzahl für die 50. Figur.

Jedoch fällt es Leonie sichtlich schwer, erkannte Muster mit Hilfe von algebraischen Mitteln zu beschreiben. Es wird an ihren Einträgen in der Spalte für die Figurnummer n deutlich. Dabei treten an diesen Stellen des Interviews gehäuft Denkpausen auf. Wir schauen uns die Bearbeitung der n-ten Spalte für die drei Zeilen der Tabelle separat an.

6	L	Und bei Platzhalter n würde (..) egal, welche Zahl man hätte, würde dann (..) die gleiche Zahl, die gleiche Anzahl von gelben Kreisen sein wie die Nummer ist (*zeigt auf die gelben Kreise der anderen Figuren*).
7	I	Ja, also wie viele?
8	L	(...) Jeweils nach der Nummer wird die (..) werden die gelben Kreise bezeichnet.
9	I	Wie viele?
10	L	Bei n jeweils nach der (..) jeweils nach der angegebenen Zahl.
11	I	Also die Anzahl ist n?
12	L	Ja, n (*lächelt und schreibt n in das Kästchen*).

Leonie versucht hier eine Übertragung ihrer Erkenntnisse von den Zahlen auf den Buchstaben n vorzunehmen. Da sie n als Platzhalter bezeichnet, lässt sich vermuten, dass im Unterricht bei der Einführung der Variablen diese Bezeichnung benutzt wurde. Leonie hat dieses gelernte Wissen anscheinend gespeichert und in der aktuellen Situation verwendet. Es wird jedoch ersichtlich, dass ein Buchstabe als Antwort auf die Frage „Wie viele?“ keine akzeptable Antwort für sie ist. Zwar kann die Schülerin verbal beschreiben was als gesuchte Anzahl der gelben Kreise für die Figurnummer n in einem bestimmten Fall jeweils zu erwarten ist, da aber diese Figurnummer als Zahl nicht greifbar (vorhanden) ist, kann die Schülerin die Frage nicht beantworten. Für Leonie ist n keine konkrete Zahl und kann deshalb nicht als Anzahl der Kreise in die Tabelle eingetragen werden. Erst nach der Hilfestellung der Interviewerin überträgt sie die Antwort n in die Tabelle. Es lässt sich dabei dennoch eine spürbare Unsicherheit erkennen, da Leonie die Antwort zunächst in die Ecke des Tabellenkästchens notiert und somit die Möglichkeit gegebenenfalls noch etwas dazuzutragen bzw. zu ändern offen lässt.

Bei der Ermittlung der Anzahl der blauen Kreise für die Spalte n geht die Schülerin wie folgt vor:

36	L	Und bei der Nummer 1 ist hier oben einer (*zeigt auf den oberen blauen Kreis in Figur 1*), hier zwei (*zeigt auf die beiden oberen blauen Kreise in Figur 2*), bei der 3 hier drei (*zeigt auf die drei oberen blauen Kreise in Figur 3*), bei der 4 hier vier (*zeigt auf die leere Stelle neben Figur 3*) und bei n ist dann oben (..) jeweils die Anzahl, also wie die Nummer auch ist.
37	I	Richtig, also wie viele oben?
38	L	Oben (..)
39	I	n
40	L	n

41	I	Und unten
42	L	Und unten auch n.
43	I	Ja richtig, wunderbar.
44	L	Oben n und unten n (*schreibt in das Kästchen*).
45	I	Und
46	L	Bei der 7
47	I	Moment, sind wir fertig? Nur oben und unten?
48	L	Oben und unten und an der rechten, rechts sind es dann einer (*schreibt ergänzend „rechts 1“*).
49	I	Aha.
50	L	Und links auch (*schreibt „links 1“*).
51	I	Okay. Und können wir das insgesamt irgendwie ausrechnen? Wie viel wäre das insgesamt?
52	L	Insgesamt müssten dann eins und eins (*zeigt auf die beiden äußeren blauen Kreise in Figur 3*).
53	I	Sind?
54	L	Das sind dann zwei und da oben ist (...) eins, eigentlich n. Also hier zwei (*zeigt auf die beiden blauen Kreise an den Enden in Figur 3*) und da oben n. (...) Eigentlich ist es dann n. Weil man weiß ja jetzt nicht welche Zahl das sein soll (*zeigt auf* n), deshalb ist das n.

Es findet hier die erste Annäherung an die verallgemeinerte formale Beschreibung statt. Leonie hat eine klare Vorstellung der Struktur des Gebildes vor ihrem geistigen Auge und drückt diese entsprechend strukturiert aus. Es ist allerdings auffällig, dass die Schülerin ihre Gedanken und mathematisch richtigen Festellungen zu diesem Zeitpunkt des Interviews noch nicht mit algebraischen Mitteln zu fassen versucht, sondern als eine kurze Beschreibung der Zusammensetzung der Figur n niederschreibt. Erst bei der Nachfrage der Interviewerin (vgl. Transkriptzeile 51) versucht Leonie ihre Darstellung der Anzahl der blauen Kreise für den Fall n zusammenzufassen. Die Anzahl der Kreise an den Enden lässt sich ausrechnen, da man zwei konkrete Zahlen einfach addieren kann. Jedoch stellt der variable mittlere Teil ein Hindernis dar: Wie kann man etwas addieren, was unbekannt ist? Somit notiert die Schülerin n als Gesamtergebnis für die Anzahl der blauen Kreise. Ihre Argumentation dabei ist: „Weil man weiß ja jetzt nicht welche Zahl das sein soll (zeigt auf n), deshalb ist das n“ (vgl. Transkriptzeile 54). Mit dieser Äußerung verdeutlicht sie, dass sie in diesem Kontext die Rolle der Variablen als Repräsentant einer beliebigen Zahl erkennt. Doch nach Leonis Gedankengang kommt bei der Addition einer unbekannten Zahl (hier n) und einer bekannten Zahl (in diesem Fall 2) wieder eine unbekannte Zahl raus.

Bei der Ermittlung der Gesamtanzahl der Kreise für die Spalte n geht Leonie wieder gemäß ihrer Zählstrategie vor und bearbeitet die siebte, die fünfzigste und die n-te Spalte in einem Wortbeitrag:

94 L Also sieben plus sieben sind vierzehn *(schreibt 7+7=14)*, und dann muss man zu den vierzehn noch mal sieben dazu tun, (..) sind dann 21 *(schreibt 14+7=21)*. Und zu den 21 muss man dann noch mal zwei von den Seiten hintun, das sind dann 23 (schreibt 21+2=23). (...) Und bei 50 muss man oben und unten 50 zusammenrechnen, das sind dann 100 *(schreibt 50+50=100)*, dazu noch das in der Mitte *(schreibt 100+50=150)*, und zu den 150 muss man dann noch die zwei an der Seite dazu tun *(schreibt 150+2=152)*. Und bei n muss man dann n plus n rechnen, das ergibt dann n *(schreibt n+n=n)*. Und dann muss man zu n noch mal n dazu tun und das Ergebnis ist dann n *(schreibt noch mal n+n=n)*, und zu n muss man dann noch plus zwei rechnen und das ergibt dann jeweils die Zahl *(schreibt n+2=n)*.

Wir versuchen, Leonies Argumentation für die Einträge in der n-Spalte nachzuvollziehen (Tabelle 4.12).

Wenn Leonie $n + n = n$ schreibt, dann ist das für sie kein Widerspruch, da sie offensichtlich das Ergebnis der Addition n von den Summanden n unterscheidet. Somit könnte die Verschriftlichung Leonies Vorgehens so aussehen (Abb. 4.21).

Damit beschreibt die Schülerin im Grunde den richtigen Algorithmus für die Ermittlung der Gesamtanzahl der Kreise. Diese Fallstudie zeigt, dass Leonie in einem geometrischen Referenzkontext das Bildungsgesetz einer Figurenfolge erkennt.

Tabelle 4.12: Aufgabe KREISE: Leonies Notation

Schritt	Notation	Sinnzuschreibung
1	Leonie schreibt $n + n = n$	meint damit die oberen und unteren blauen Kreise
2	Leonie schreibt $n + n = n$	meint damit das Ergebnis des ersten Rechenschrittes und die mittleren gelben Kreise
3	Leonie schreibt $n + 2 = n$	meint damit das Ergebnis des zweiten Rechenschrittes und die beiden Randkreise

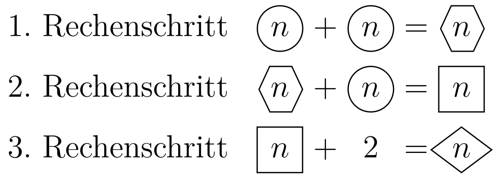


Abbildung 4.21: Beschreibung der Vorgehensweise von Leonie

Sie erfasst dieses exemplarisch für konkrete Zahlenwerte, indem sie ihre Rechenschritte aufschreibt. Allerdings werden diese einzelnen Rechenschritte anschließend nicht durch einen Zahlenterm dargestellt. Leonies größtes Problem stellt das Wechselspiel zwischen einem Symbol und seiner Bedeutung dar. Zwar weiß sie, dass ein Buchstabe stellvertretend für eine bestimmte Zahl steht (vgl. Transkriptzeile 6 und 10) und kann auch eine Zahl für n einsetzen: „Wenn n drei ist ...“ (vgl. Transkriptzeile 58), doch im Umgang mit Variablen berücksichtigt die Schülerin nicht, dass der Buchstabe n, sobald er für eine unbekannte aber bestimmte Zahl steht, auch diesen Wert in einem gegebenen Kontext beibehalten muss. Zum anderen ist sie noch nicht in der Lage, mit den Symbolen aus der Sicht der Arithmetik wiederspruchsfrei zu operieren: sie achtet bei der Niederschrift ihrer Rechenschritte nicht auf die Richtigkeit des Gleichheitszeichens.

4.2.2 Analysen zur Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

Tabelle der Notation

Die folgende Tabelle 4.13 zeigt die unterscheidlichen Formen der Notation bei der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE. Bei der Frage nach fünf Würfeln notierten einige Kinder die numerischen Ergebnisse ihrer Rechnungen (wie Dennis), während andere ihre Überlegungen strukturiert festhielten, wie Michael und Verena. Interessant zu beobachten ist, dass die Art der Notation nichts darüber aussagen kann, ob die Kinder im nächsten Schritt eine allgemeine Formel erstellen können. Die Spalte zu zehn Würfeln zeigt eindeutig, dass eine Reihe von Kindern (wie Petra), zwar zu keiner symbolischen Darstellung gelangt, dennoch eine Gesetzmäßigkeit beobachtet und sie an einem konkreten Beispiel strukturell anwenden kann.

Tabelle 4.13: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE – Vergleich: Notation

Schule	Kind	5 Würfel	Formel	10 Würfel
G1-de	Kevin	17	$n \cdot 3 + 2$	32
G1-de	Verena	$5 + 5 + 5 + 2$	$n + n + n + 2$	$10 + 10 + 10 + 2$
G1-de	Dennis	17	–	–
G1-de	Torsten	17	$n \cdot 3 + 2$	$3 \cdot 10 = 30 + 2$
G1-de	Michael	$14 - 1 + 4 = 17$	$n + 8 + n$	$4 + 4 + (8 \cdot 2) = 32$
G1-de	Laura	17	$n \cdot 3 + 2$	$10 \cdot 3 + 2 = 32$
G2-de	Jessica	$5 \cdot 3 = 15$ $15 + 2 = 17$	$n \cdot 3 + 2$	$10 \cdot 3 = 30 + 2 = 32$
G2-de	Angela	$3+3+3+4+4$	–	10 Würfel $= 4 + 4 = 8$ $10 - 2$ Würfel $= 8$ $8 \cdot 3 = 24$ $24 + 8 = 32$
G2-de	Leonie	17	$n + n + n + 2$	$10 + 10 + 10 + 2 = 32$
G2-de	Petra	17	–	$10 \cdot 3 = 30$ $10 \cdot 3 + 2 = 32$
G2-de	Eva	–	–	–
G2-de	Sabine	17	Die Zahl davor +3 Quadrate	32
G3-ru	Tina	$14 - 1 = 13 + 4$ $= 17$	$n - 1 + 4$	–
G3-ru	Katrin	17	$n \cdot 3 + 2$	32
G3-ru	Lena	$5 \cdot 3 + 2 = 17$	$n \cdot 3 + 2$	$10 \cdot 3 + 2 = 32$
G3-ru	Nikita	17	$5 + 3 \cdot (n - 1)$	$5 + 3 \underset{27}{\cdot} (10 \underset{9}{-} 1) = 32$
G3-ru	Jan	17	$n \cdot 3 + 2$	32
G3-ru	Peter	17	–	32
G4-ru	Nina	$5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 17$	$n \cdot 5 - ((n-1) \cdot 2)$ $5 + 3 \cdot (n - 1)$	$\underset{10}{n} \overset{50}{\cdot} 5 - ((\underset{10}{n} \overset{9}{-} 1) \overset{18}{\cdot} 2) = 32$
G4-ru	Roman	$5 \cdot 3 + 2 = 17$	$n \cdot 3 + 2$	$10 \cdot 3 + 2 = 32$
G4-ru	Max	17	$n \cdot 3 + 2$	32
G4-ru	Andreas	17	$n \cdot 3 + 2$	$10 \cdot 3 + 2 = 32$
G4-ru	Julia	$5 + 5 + 2 + 5$	$n + n + 2 + n$ $n \cdot 3 + 2$	$10 + 10 + 2 + 10 = 32$
G4-ru	Olga	$5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 17$	$5 \cdot n - (n - 1 \cdot 2)$	–

G1 - Gymnasium 1; G2 - Gymnasium 2; G3 - Gymnasium 3; G4 - Gymnasium 4;
de - Deutschland; ru - Russland

Vorgehensweisen

Die Auswertung der Interviews hat Folgendes gezeigt: Während einige Kinder die sichtbaren Quadrate mehr oder weniger unstrukturiert zählen, verwenden andere verschiedene dezidierte Abzählstrategien. Neben ihren Berechnungen stellen sie arithmetische Terme als Kurzprotokolle von Rechenstrategien auf und geben mit Hilfe einer Formel an, wie die Anzahl der sichtbaren Quadrate mit der Anzahl n der Würfel zusammenhängt (Tab. 4.13).

Typische Vorgehensweisen und Argumentationen der Probanden lassen sich gut an den folgenden Lösungen von einigen Fünftklässlern aufzeigen:

Verena zählt nacheinander die Quadrate an der Vorderseite, der Oberseite und der Rückseite und berücksichtigt anschließend die beiden Quadrate an den Enden der Würfelschlange. Sie gelangt zu dem Term $n + n + n + 2$.

Kevin zählt die drei Reihen gebündelt und fügt dann die beiden Quadrate an den Enden hinzu. Er kommt auf den Term $n \cdot 3 + 2$.

Lena betrachtet im Gegensatz zu Verena und Kevin die Quadrate pro Würfel und zählt das obere, vordere und hintere Quadrat eines Würfels und dann die beiden Quadrate an den Enden. Ihren Vorgang verallgemeinert sie durch den Term $n \cdot 3 + 2$.

Nikita erkennt die Veränderung und prüft die mit jedem neuen Würfel hinzukommende Anzahl der sichtbaren Quadrate. Schon nach drei Würfeln verkündet er, eine Gesetzmäßigkeit gesehen zu haben und notiert den Term $5+3\cdot(n-1)$.

Nina überlegt sich: Jeder Würfel hat, wenn er allein auf dem Tisch liegt, 5 sichtbare Quadrate. Werden zwei Würfel zusammen geschoben, decken sich zwei vorher sichtbare Quadrate an den Enden gegenseitig zu. Werden n Würfel zusammen geschoben, entstehen $n - 1$ Nahtstellen dieser Art. So kommt die Schülerin auf den Term $n \cdot 5 - (n - 1) \cdot 2$.

Vergleicht man die Bearbeitungen der Aufgabe durch die Kinder im Hinblick auf ihre unterschiedlichen Herangehensweisen, so lassen sich zwei bestimmte Lösungsmuster erkennen: eine statische und eine dynamische Deutung der Situation. Somit wird ein momentaner Zustand (z. B. bei Verena, Kevin und Lena) oder eine Veränderung in den Würfelschlangen (z. B. bei Nikita und Nina) erfasst.

Diese unterschiedlichen Sichtweisen spiegeln sich in den von den Kindern aufgestellten Zahlentermen und algebraischen Termen wider. In Tabelle 4.14 werden unterschiedliche Lösungen strukturiert zusammengefasst.

Tabelle 4.14: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Abzählstrategien der Schüler

Abzählstrategien		Term
1	**Herangehensweise aus statischer Sicht**	
1.1	**Kind betrachtet die Quadrate pro Reihe:**	
	Zählt die drei Reihen hintereinander und dann die beiden Quadrate an den Enden	$n + n + n + 2$
	Zählt die drei Reihen gebündelt und dann die beiden Quadrate an den Enden	$n \cdot 3 + 2$
1.2	**Kind betrachtet die Quadrate pro Würfel:**	
	Zählt das obere, vordere und hintere Quadrat der Würfel und dann die beiden Quadrate an den Enden	$n \cdot 3 + 2$
	Zählt die Quadrate der beiden äußeren Würfel und dann die Quadrate der inneren Würfel	$4 + 4 + (n - 2) \cdot 3$
2	**Herangehensweise aus dynamischer Sicht Kind erkennt die Veränderung:**	
	Zeigt, welche Quadrate mit jedem neuen Würfel hinzukommen	$5 + 3 \cdot (n - 1)$
	Zeigt, welche Quadrate mit jedem neuen Würfel verdeckt werden	$5 \cdot n - (n - 1) \cdot 2$

Herausforderungen beim symbolischen Beschreiben

Auf dem Weg zur Termdarstellung sind die Probanden allerdings unterschiedlich weit fortgeschritten, da vorhandene Hürden in Denk- und Sprechhandlungen zu überwinden waren. Die Bearbeitungen der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE der beiden Schülerinnen Angela und Petra sollen stellvertretend für zwei typische unterschiedliche Herangehensweisen – statisch und dynamisch – erläutert werden.

Angela und Petra konnten beide mit Hilfe ihrer individuellen Zählstrategien die Frage nach zehn Würfeln beantworten und auch die Rollen der Zahlen in ihren Rechnungen benennen, schaffen jedoch den Schritt zur symbolischen Darstellung nicht.

Angela bearbeitet die Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

Ausgehend von ihren Beobachtungen der ertsen drei Würfelschlangen entwickelt Angela eine Rechenstrategie, um die Anzahl der sichtbaren Quadrate zu erhalten: sie erkennt, dass durch das Hinzufügen eines neuen Würfels stets drei quadratische Flächen hinzukommen (Abb. 4.22). Diese Rechenstrategie kann sie auch auf den Fall von vier Würfeln übertragen und sie hat das Vertrauen in die Richtigkeit ihrer Strategie, obwohl sie die konkrete viergliedrige Würfelschlange (noch) nicht gebildet hat. Im Übrigen wendet Angela flexibel das Assoziativgesetzt an, denn sie rechnet die Summe $3 + 4 + 4$ nicht der Reihe nach, sondern fasst zuerst $4 + 4$ zusammen und addiert anschließend die verbleibende Zahl 3. Das Vertrauen in ihre Strategie setzt sich auch bei fünf Würfeln fort.

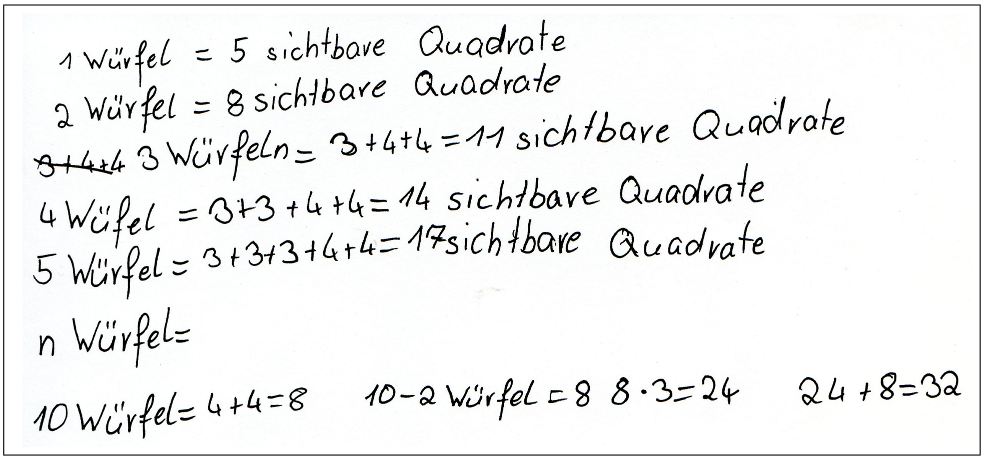

1 Würfel = 5 sichtbare Quadrate
2 Würfel = 8 sichtbare Quadrate
~~3+4+4~~ 3 Würfeln = 3+4+4 = 11 sichtbare Quadrate
4 Würfel = 3+3+4+4 = 14 sichtbare Quadrate
5 Würfel = 3+3+3+4+4 = 17 sichtbare Quadrate
n Würfel =
10 Würfel = 4+4=8 10-2 Würfel = 8 8·3=24 24+8=32

Abbildung 4.22: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Angelas Lösung

Probleme tauchen bei Angela erst auf, wenn sie eine allgemeine Regel formulieren soll. Ab diesem Zeitpunkt macht sie auch vermehrt Pausen. Sie kann ihre Beobachtung der Vermehrung um drei nicht in einer Formel ausdrücken. Bei der Frage nach 10 Würfeln verwendet die Schülerin die schon erprobte Zählstrategie, jedoch macht sie dabei separate Rechenschritte: zunächst werden die sichtbaren Quadrate an den Enden zusammenzählt ($4 + 4 = 8$), dann wird die Anzahl an dazukommenden Würfeln berechnet ($10 - 2 = 8$), dann die Gesamtzahl an dazukommenden Quadraten bestimmt ($8 \cdot 3 = 24$) und anschließend die Quadrate an den Enden dazugezählt ($24 + 8 = 32$).

Angela sieht offenbar, wie sie für eine gegebene Zahl von Würfeln die Aufgabe sequentiell bearbeiten kann. Das Schriftbild (Abb. 4.22) deutet darauf hin, dass die Schülerin wohl die Rechnung auch für eine beliebige Anzahl von Würfeln ausführen könnte. Diese einzelnen Rechenschritte werden jedoch nicht in Form eines Zahlenterms dargestellt, was vermutlich die Aufstellung einer entsprechenden symbolischen Darstellung verhindert.

Doch auch wenn sie es geschafft hätte, ihre Zählstrategie in Form eines geschlossenen Terms darzustellen, ist nicht auszuschließen, dass der nächste Schritt zur symbolischen Darstellung verhindert werden würde, da dafür ein Vorhandensein eines *Symbol Sense* notwendig wäre.

Petra bearbeitet die Aufgabe WÜRFELSCHLANGE

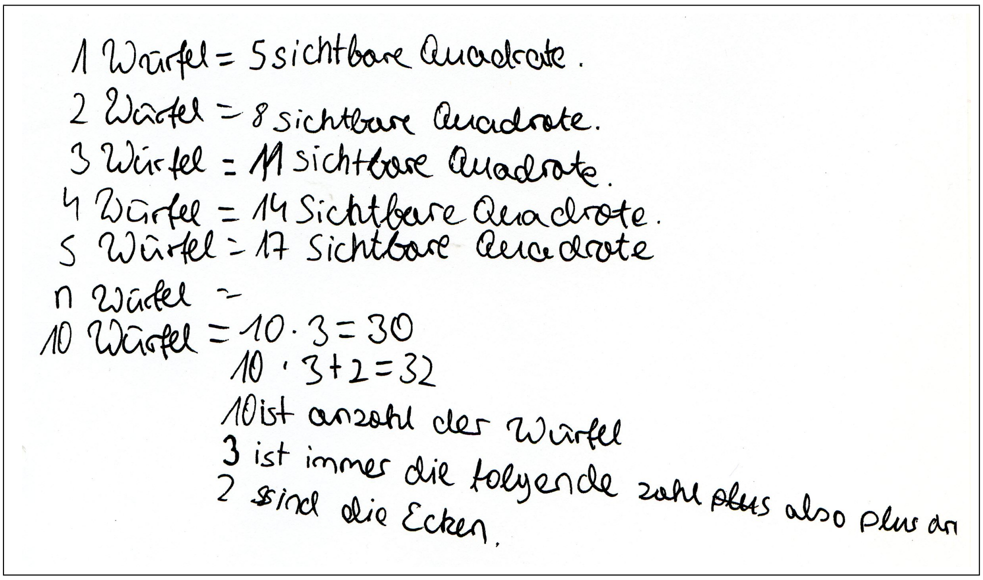


Abbildung 4.23: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Petras Lösung

Bei der Betrachtung der ersten fünf Würfelschlangen, formiert sich bei Petra eine bestimmte Abzählmethode, die bei der Frage nach zehn Würfeln in eine bewusste statische Zählstrategie übergeht. Die Schülerin hat das Muster strukturell erfasst und stellt die Rechnung $10 \cdot 3 + 2$ als arithmetischen Term auf (Abb. 4.23). Petra deutet in diesem Term die Zahlen 2 und 3 als konstante Bestandteile der Rechnung. Die Zahl 10 steht bei ihr zwar als konkrete Anzahl der Würfel in einer 10er Schlange, repräsentiert für sie jedoch einen variablen Bestandteil der Rechnung. So kann Petra mit ihrer Strukturierung vermutlich auch die Frage nach einer beliebig langen Würfelschlange beantworten. Der Schritt zur symbolischen Darstellung dürfte auch für sie ohne den dafür erforderlichen *Symbol Sense* eine Hürde darstellen.

Weiterhin gibt es Kinder, die auf der Stufe der Musterbeobachtung verblieben sind und den Schritt zur strukturellen Mustererkennung nicht gehen konnten. Deutlich wird das am Beispiel von Sabine (Abb. 4.24), die zwar ein Veränderungsmuster in der Zahlenfolge der sichtbaren Quadrate bemerkt hat, aber weder einen Bezug zur Figurennummer noch zur Struktur der Schlangenfolge herstellt.

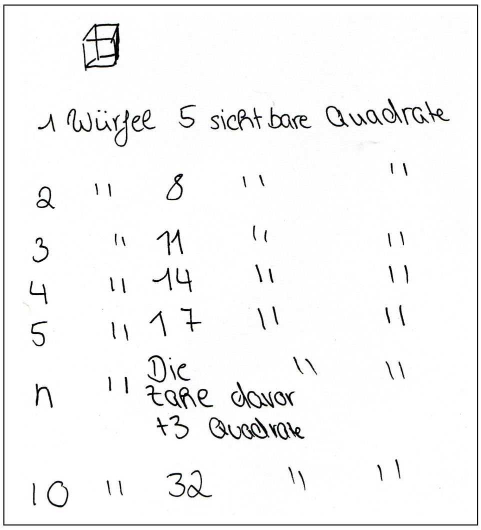


Abbildung 4.24: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Sabines Lösung

Die Frage nach der 10er Würfelschlange

Auf dem Tisch vor einem Probanden liegt eine 5er Würfelschlange und ein Interviewbogen mit notierten Ergebnissen für die 1er bis zur 5er Würfelschlange sowie eine Formel für n Würfel. Die Interviewerin legt eine weitere 5er Würfelschlange auf den Tisch und fragt nach der Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einer 10er Würfelschlange. Von besonderem Interesse ist es zu beobachten, wie die Interviewfrage nach zehn Würfeln – unmittelbar nachdem die Kinder ihre Terme mit Hilfe der Variable n für eine beliebige natürliche Zahl allgemein aufgestellt haben – bearbeitet wird.

Während einige Kinder die auf dem Tisch liegenden Würfel zusammen schoben und abzählten, führten die anderen ihre Zählstrategien fort bzw. benutzten die selbst entwickelten algebraischen Darstellungen, indem sie statt der Variablen n

die Zahl zehn in die Formel einsetzten (vgl. die Lösung von Kevin) und zu der richtigen Lösung 32 kamen. Letztere argumentierten in einer Struktur-Rahmung. Andere Kinder wiederum behaupteten, dass bei der Verdoppelung der Anzahl der Würfel sich auch die Anzahl der sichtbaren Quadrate verdoppeln würde.

Die im Folgenden analysierten Episoden aus den Interviews mit Verena und Nikita zeigen, wie Kinder in dieser Situation typischerweise argumentieren.

Verena bearbeitet die Frage nach der 10er Würfelschlange

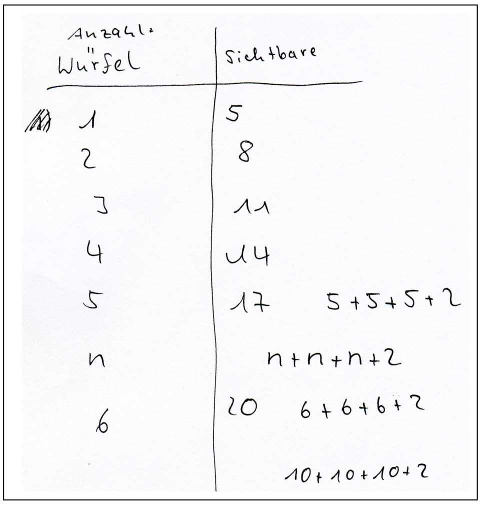
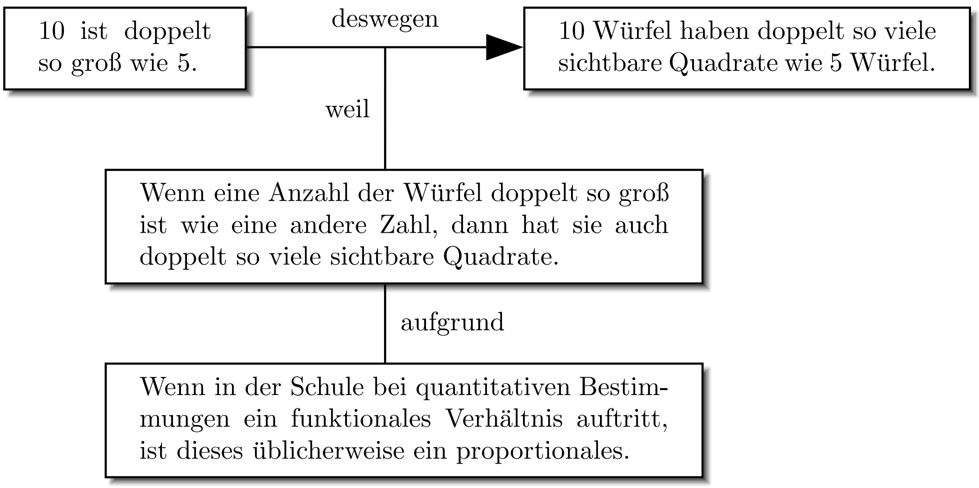


Abbildung 4.25: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Verenas Lösung

Die nachfolgende Szene stammt aus einem Interview mit Verena, die die Frage nach 10 Würfeln beantworten sollte. Zur Vorgeschichte: Verena hatte zuvor die Quadrate von den langen Seiten einer Schlange und anschließend die beiden Quadraten an den Enden berücksichtigt, sie kam zu dem Term $n + n + n + 2$ (Abb. 4.25).

64 V Das Doppelte von siebzehn wäre vierunddreißig. Ähm, ich hab mich vertan, das wären zweiunddreißig, weil hier wieder zwei wegfallen, zwei Seiten *(zieht eine Schlange von fünf Würfeln von den zehn weg und schiebt sie wieder zusammen)*

Man kann Verenas Begründung zwei nacheinanderfolgende Argumente entnehmen, die zu unterschiedlichen Typen zuzuordnen sind. Verena berechnet zunächst das Doppelte der Zahl 17. Sie bezieht damit das Ergebnis bei fünf Würfeln mit ein und stellt offensichtlich einen arithmetischen Zusammenhang zwischen der Anzahl von 5 und 10 Würfeln her: 10 ist das Doppelte von 5. Dieses Vorgehen legt den Schluss nahe, dass Verena vom Verhältnis der Würfelanzahl auf das Verhältnis der Anzahl der sichtbaren Quadrate schließt: Wenn die Anzahl der Würfel doppelt so groß ist wie eine andere Zahl, dann hat die entsprechende Würfelschlange auch doppelt so viele sichtbare Quadrate. Mit Toulmin ausgedrückt liefert Verena das folgende Argument 1:



Über eine mögliche Stützung dieses Arguments erfährt man von Verena explizit nichts. Da ein solcher „Verdoppelungsfehler" aus der Literatur bekannt ist (vgl. Schwarzkopf, 2000, 290), kann man vermuten, dass die Schülerin im Arithmetikunterricht an die proportionalen Zusammenhänge zwischen den Zahlen gewöhnt ist, und dass der Garant deswegen für Verena Gültigkeit erhält. Diese Art der Argumentation könnte man als arithmetisch-konstruktiv bezeichnen.

Da Verena aber vorher bei der Ermittlung von der Anzahl sichtbarer Quadrate für zwei Würfel genau denselben Denkfehler gemacht und durch die Anschauung von konkreten Gegenständen ihre Fehlvorstellung erkannt hat, konnte sie ihre Antwort gleich selbst revidieren: „ich hab mich vertan, das wären zweiunddreißig". Diese Interpretation scheint plausibel, da die Schülerin bei ihrer Begründung bezüglich des Wegfallens von zwei Flächen den Ausdruck „weil hier wieder" verwendet. Ein Argument 2, durch das die Richtigkeit der Rechnung jetzt gerechtfertigt wird, kann so dargestellt werden:

5er Würfelschlange hat 17 sichtbare Quadrate.

deswegen

10er Würfelschlange hat 32 sichtbare Quadrate.

weil

Das Doppelte von 17 ist 34. Allerdings decken sich beim Zusammenfügen von zwei 5er Würfelschlangen zwei vorher sichtbare Quadrate an den Enden gegenseitig zu.

aufgrund

Eigene Erfahrung beim Operieren mit zwei Würfeln: wenn zwei Würfel „zusammengeschlossen“ werden, „fallen zwei Quadrate weg“.

Das vorgebrachte Argument kann man – da es anschauungsgebunden auf einer individuellen Strukturierung der Situation durch die Schülerin basiert – einen arithmetisch-strukturellen Typ zuordnen. Die Argumentation ist damit abgeschlossen und weder für die Schülerin noch für die Interviewerin besteht weiterer Begründungsbedarf.

Die Interviewerin erkennt zwar die Gültigkeit des Arguments an, fragt zugleich aber nach dem Gebrauch der Formel in vorliegender Sachlage.

65	I	Aah. Okay. Mmh, du kannst so rechnen. Und, kannst du deine Formel benutzen?
66	V	Also, hier meine Formel *(zeigt auf den Term $n+n+n+2$)* ähm, ja. Sie sind ja jetzt einfach nur zusammengeschlossen. Sind ja einfach nur mehrere.
67	I	Ja, zehn Stück.
68	V	Ja, also sind es zehn plus zehn plus zehn plus zwei *(schreibt dies in die Tabelle)* sind zweiunddreißig.

Verena versucht offensichtlich, sich zunächst in die neue Perspektive einzufinden. Zwar zeigt sie auf ihren algebraischen Term, muss sich selbst jedoch vorher die Situation durch lautes Denken klar machen (vgl. Transkriptzeile 66). Dies deutet indirekt darauf hin, dass die Schülerin von sich aus an dieser Stelle kein algebraisches Argument gewählt hätte. Erst nachdem eine konkrete Anzahl an Würfeln, „zehn Stück“ (vgl. Transkriptzeile 67), im Gespräch ist, wendet Verena den Term $10+10+10+2$ an und berechnet dessen Wert. Das Ergebnis stimmt mit der zuvor ermittelten Zahl 32 überein. Unklar allerdings ist, ob die Schülerin an dieser Stelle ihre ursprüngliche Strukturierung verwendet, indem sie drei Reihen hintereinander und anschließend die beiden Quadrate an den Enden zählt oder aber mit ihrer Formel durch das Einsetzen des Wertes 10 statt n operiert. Die formale Verwendung der Formel weist jedoch keine Begründungsfunktion auf.

Für beide Interpretationen wird hier Verena eine Struktur-Rahmung unterstellt. Die Rekonstruktion von Argumenten, die innerhalb dieser Rahmung angebracht sind, erlaubt die erste zu arithmetisch-strukturellen und die zweite zu prä-algebraischen Argumentationstyp zuzuordnen.

Nikita bearbeitet die Frage nach der 10er Würfelschlange

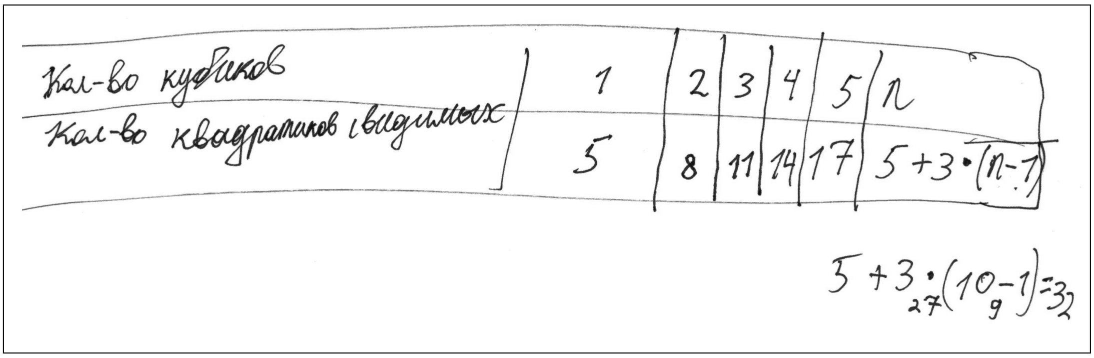


Abbildung 4.26: Aufgabe WÜRFELSCHLANGE: Nikitas Lösung

Nun betrachten wir ein weiteres Argumentationsbeispiel bei gleicher Fragestellung. Die nachfolgende Szene stammt aus einem Interview mit Nikita. Zur Vorgeschichte: Nikita erkennt bei Würfelschlangen gleichzeitig zwei Muster: zunächst fällt ihm auf, dass er die Quadrate der oberen, vorderen und hinteren Reihe gebündelt zählen kann, schließlich erkennt er die Veränderung „+3“ beim Entstehen einer neuen Schlange und stellt den Term $5 + 3 \cdot (n - 1)$ auf (Abb. 4.26).

59	I	Wie viele Quadrate werden bei zehn Würfeln sichtbar?
60	N	Zehn (..) Da werden vierunddreißig.

Nach kurzer Bedenkzeit erklärt der Schüler, dass das Ergebnis „34“ sei. Anscheinend hatte Nikita von der Anzahl 17 sichtbarer Quadrate bei fünf Würfeln auf 34 sichtbare Quadrate bei zehn Würfeln geschlossen. Vermutlich wäre diese Antwort ohne weiteres Nachfragen der Interviewerin von dem Schüler für richtig gehalten worden. An dieser Stelle regt die Interviewerin mit ihrer Frage nach dem Rechenverfahren Nikita dazu an, sein Ergebnis zu begründen.

61 I Wie hast du gerechnet?
62 N Siebzehn plus siebzehn. Bei fünf sind es siebzehn, und zehn ist doppelt so groß wie fünf.

Nikita führt hier das gleiche Argument an, wie Verenas erstes Argument. Der Schüler macht hier einen Fehler der Übergeneralisierung, indem er in einer unpassenden Situation die Proportionalität vermutet. Die beiden fast wortgleichen Äußerungen von Schülern aus unterschiedlichen Ländern – Verena geht in Essen (Deutschland) und Nikita in St. Petersburg (Russland) zur Schule – demonstrieren die kulturübergreifende Verbreitung dieser Fehlvorstellung.

Auch der weitere Verlauf der Szene weist darauf hin, dass Nikita mit seiner bisherigen Argumentation zunächst zufrieden ist:

63 I Bilde die Schlange und rechne nach.
64 N *(bildet eine Schlange aus 10 Würfeln durch Heranschieben von zwei Würfelschlangen der Länge fünf)* Eins, zwei *(zählt die oberen Quadrate einzeln)*, ah! *(zeigt mit dem Stift die obere Reihe entlang)* Dreißig, einunddreißig, zweiunddreißig (.) Und 17 plus 17 (...)
65 I Vierunddreißig.
66 N Stimmt nicht!
67 I Was stimmt nicht?
68 N Gerechnet habe ich richtig.

Die Äußerung des Schülers „Gerechnet habe ich richtig“ erlaubt es anzunehmen, dass für Nikita ein Rechenfehler als einzig mögliche Ursache für die Unstimmigkeit der Ergebnisse in Frage kommt. Der Konflikt erscheint ihm in dem Moment aber nicht lösbar, denn Nikita glaubt buchstäblich seinen eigenen Augen nicht. Die Interviewerin macht den Schüler erneut auf die vor ihm liegende 10er Würfelschlange aufmerksam:

69 I Wie viele Quadrate sehen wir?
70 N Zweiunddreißig.
71 I Zweiunddreißig, das ist die Tatsache.

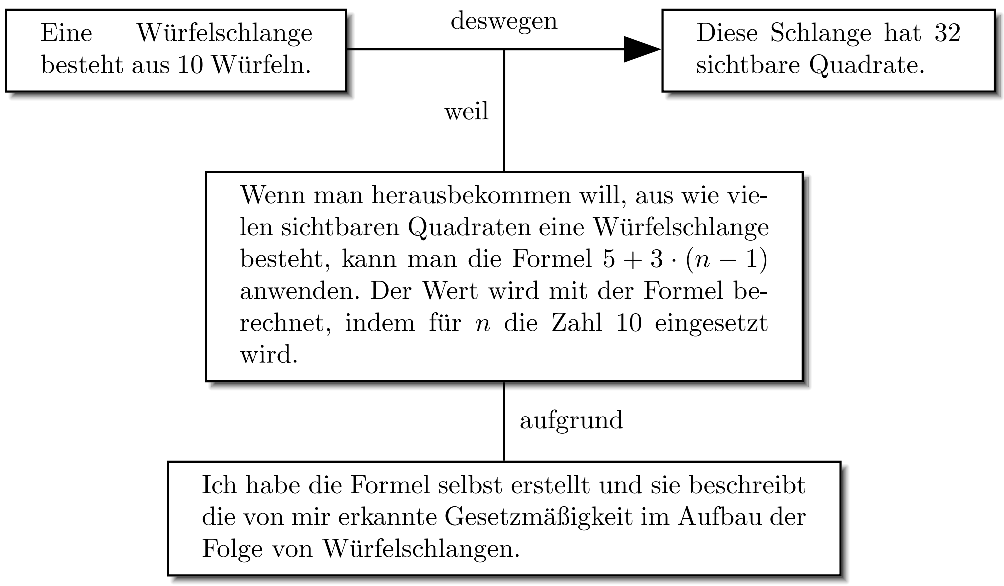
Um den weiteren Verlauf der Überlegungen nicht zu beeinflussen, wird an dieser Stelle die Antwort des Schülers nur wiederholt und keine weitere Frage gestellt. Spannend zu beobachten war nämlich, welche Argumente und Darstellungen Nikita anführen würde. Der Schüler stand vor der Herausforderung, sich mit dieser Konfliktsituation auseinanderzusetzen, die durch unterschiedliche Ergebnisse als

Folge verschiedener Ansätze bei der Aufgabenlösung entstanden war. Es standen unterschiedliche Möglichkeiten zur Bewältigung der Situation zur Verfügung, u. a. die Überprüfung des eigenen Arguments. Nikita bringt jedoch – nach dem Verdoppelungsansatz und Abzählen – ein drittes Verfahren ins Spiel:

72 N Nun, wir können mit diesem Schema versuchen *(zeigt auf den Term* $5 + 3 \cdot (n - 1)$*, schreibt einen Zahlenterm* $5 + 3 \cdot (10 - 1)$ *auf und rechnet den Wert aus)*. Alles richtig, 32.

Man kann vermuten, dass der Schüler seine Formel deshalb anwendet, weil ihm bis jetzt die zwei unterschiedlichen Ergebnissen beim Ausrechnen (34) und beim Abzählen (32) ein Rätsel sind. Nun will er mit einem dritten Ansatz klären, ob seine bisherigen Überlegungen und die daraus entstandene Formel – die sich schon bei 5er Schlange bewährt hat – dasselbe Ergebnis 32 liefern. Sein Fingerzeig auf den Term $5 + 3 \cdot (n - 1)$ kann als Begründungshinweis interpretiert werden. Auf seine Stützung gibt Nikita keine Hinweise, doch ist das Vertrauen des Schülers in seine eigene Formel spürbar. Die symbolische Darstellung wird von Nikita als Argumentationsmittel verwendet.

Mit Toulmin wäre dabei folgendes Argument denkbar:



Der berechnete Wert des Terms stimmt mit dem Ergebnis des Abzählens überein. Die Welt ist für Nikita wieder in Ordnung und er verkündet: „Alles richtig, 32“. Diese letzte Äußerung erlaubt zumindest zwei Interpretationen. Zum einen könnte dies ein Ausdruck der Erleichterung sein, weil die ermittelte Zahl 32 der Sachlage entspricht. Zum anderen könnte der Schüler damit die Richtigkeit seiner Formel für sich selbst noch einmal bestätigt haben. Auffällig ist, dass die Gültigkeit des letzten Arguments für den Schüler eine Endgültigkeit bedeutet, denn es ist Nikita kein inneres Bedürfnis, sich über die Ursachen des Konfliktes Gedanken zu machen.

Die Interviewerin fragt jedoch nach und initiiert ein Argumentationsprozess:

73	I	Und was war dort mit 17?
74	N	Ich ahne etwas, aber verstehe nicht was es ist (..)
75	I	Lass uns überlegen, was wir gemacht haben (..) Das sind Würfel vor dir, schau sie an!

Da der Schüler in seiner vorherigen Rahmung die Aufgabe anscheinend als erledigt betrachtet, nimmt er entspannt an der Aufklärung der Fehlerursache teil und überlegt anhand konkreter Gegenständen:

76	N	Nun, wo hatten wir 17? *(Trennt die Schlange in zwei Schlangen je fünf Würfel).* Ah! *(strahlt)*
77	I	Hast du es?
78	N	Aha!
79	I	Sag es mir.
80	N	Ich kann sogar zeigen *(schiebt beide kurze Schlangen aneinander und wieder auseinander).* Hier waren 17 und hier 17. Und diese zwei Quadrate verschwanden.

Schließlich liefert Nikita damit das gleiche Argument wie Verenas zweites Argument, um seinen ursprünglichen Fehler zu erklären.

Die oben analysierten Interiewszenen zeigen, dass die Frage mit den beiden zusammengeschobenen 5er Schlangen sich als sehr nützlich für die Studie erwiesen hat. Dadurch wird ein neuer Aspekt in die Situation gebracht, der zur Bewährungsprobe für die bisherigen Überlegungen wird.

4.2.3 Analysen zur Aufgabe ZAHLENSUMME

Tabelle der Notation

In der folgenden Tabelle 4.15 werden die Notationen aller 24 Studienteilnehmer bei der Aufgabe ZAHLENSUMME dargestellt. Die Übersicht enthält Angaben über die Anzahl angeführter Zahlenbeispiele und – wenn vorhanden – die jeweilige formale Darstellung.

Tabelle 4.15: Aufgabe ZAHLENSUMME – Vergleich: Notation

Schule	Kind	Anzahl von Überprüfungen	Formale Darstellung
G1-de	Kevin	2	$n \cdot 3 = (n-1) + (n) + (n+1)$ $[(n-1) + (n) + (n+1)] : 3 = n$
G1-de	Verena	5	$n + n + 1 + n + 2$
G1-de	Dennis	1	–
G1-de	Torsten	7	–
G1-de	Michael	7	–
G1-de	Laura	5	$[(4+1) + (n+2) + (n+3)]$
G2-de	Jessica	2	$10 + n + 12 = 33$
G2-de	Angela	7	–
G2-de	Leonie	2	$n - 1 + n + n + 1 = n$ $n : 3 = n$
G2-de	Petra	1	–
G2-de	Eva	4	–
G2-de	Sabine	3	–
G3-ru	Tina	0	–
G3-ru	Katrin	1	$(n-1) + n + (n+1) = n \cdot 3$
G3-ru	Lena	0	$n - 1 + n + n + 1 = 3n : 3 = n$
G3-ru	Nikita	1	$(n-1) + n + (n+1)$ $= (n + n + n) : 3 = n$
G3-ru	Jan	4	$(n+1) + (n-1) + n = 3n : 3 = n$
G3-ru	Peter	1	$(n-1) + n + (n+1) =$
G4-ru	Nina	1	$n - 1 + n + n + 1 = n + n + n - 1 + 1$ $= 3n - 1 + 1 = 3n$
G4-ru	Roman	5	–
G4-ru	Max	0	–
G4-ru	Andreas	3	–
G4-ru	Julia	3	–
G4-ru	Olga	2	–

G1 - Gymnasium 1; G2 - Gymnasium 2; G3 - Gymnasium 3; G4 - Gymnasium 4;
de - Deutschland; ru - Russland

Vorgehensweisen

Nahezu alle Schüler mussten – wenn auch unterschieldliche – Anstrengungen zur Bewältigung der ersten zwei Stufen (Textverständnis und Situationsverständnis) nach Stern (1998) im Prozess der Aufgabenbearbeitung unternehmen. Seine Ursache hatte dies zum einen in dem offenen Format der Aufgabe, zum anderen in der Vielzahl von Fachtermini in der Aussage.

Einige Kinder hielten die Aufgabe für eine Feststellung, nahmen demzufolge eine *Rechen-Rahmung* an und sahen ihre Aufgabe darin, diese Feststellung durch Beispiele zu illustrieren. Andere Kinder haben die offene Aufgabenstellung als eine Untersuchungssituation gedeutet. Sie nahmen eine *Struktur-Rahmung* an und gingen an die Aufgabe in der Weise heran, dass sie die Richtigkeit der Aussage zunächst anhand konkreter Beispiele überprüften, eine Hypothese zur Allgemeingültigkeit aufstellten und diese Hypothese zu untermauern versuchten. Es kam zum Teil vor, dass eine gezielte Nachfrage der Interviewerin nach der Allgemeingültigkeit der Aussage zu einer Rahmungsmodulation von der *Rechen-Rahmung* zur *Struktur-Rahmung* führte.

Innerhalb der eingenommenen Rahmungen haben die Kinder unterschiedlich agiert. Kinder mit einer *Rechen-Rahmung* führten in der Regel 1-3 Beispiele an und sahen ihre Arbeit damit als erledigt an. Bei den Schülern der *Struktur-Rahmung* kann weiter differenziert werden: Eine Gruppe wählte einen arithmetischen Zugang und überprüfte die Aussage anhand von konkreten Beispielen. Dabei reichten in den Augen der Kinder in der Regel 3 bis 5 Beispiele aus, um den Schluß auf eine unbegrenzte Gesamtheit zu machen. Eine andere Gruppe erweiterte den arithmetischen um einen enaktiven Zugang, indem Kinder durch Hantieren mit Plättchen zu argumentieren versuchten und hierdurch die Verifizierung der Aussage nachwiesen. Schüler mit einem algebraischen Zugang benötigten lediglich 1-2 Beispiele, beschrieben die Situation symbolisch und bewiesen die Richtigkeit der Aussage im Allgemeinfall durch Termumformungen.

Herausforderungen beim symbolischen Beschreiben

Die Versuchspersonen zeigten im Ergebnis eine breit gefächerte Pallette an Ideen und Möglichkeiten der formalen Darstellung. Vielfach bildete der Schritt zur Formalisierung eine noch zu große und daher nicht überwindbare Hürde. In diesen Fällen sahen die Kinder – wie Dennis – von der Formalisierung komplett ab.

Andere – wie Leonie – tasteten sich an die formale Darstellung ihrer Ideen heran. Sie schafften es, die Situation symbolisch zu beschreiben, scheiterten aber an einer Operation mit Termen. Einige Schüler wiederum – wie Nikita – kamen souverän mit dem symbolischen Beschreiben zurecht, konnten Termumformungen durchführen und verwendeten die symbolische Darstellung als Argumentationsmittel. Einige charakteristische Fälle werden hier detaillierter dargestellt.

Dennis' Rechen-Rahmung

Dennis nimmt eine *Rechen-Rahmung* an und meint nach der Niederschrift nur eines Beispieles $5+6+7=18$, welches er durch die Multiplikation $3 \cdot 6 = 18$ überprüft, seine Bearbeitung beendet zu haben.

Leonies Struktur-Rahmung

Leonie überprüft mit ihrer *Struktur-Rahmung* drei konkrete Zahlenbeispiele unter Zuhilfenahme der auf dem Tisch liegenden Kärtchen und glaubt, dass die Aussage für alle solche Zahlentripel gilt. Nachdem die Interviewerin Leonie bittet, anhand der Kärtchen mit den Termen n, $n-1$, $n+1$ ihre Hypothese zu belegen, ordnet die Schülerin die Kärtchen in richtiger Reihenfolge an und kann diese Anordnung erklären:

39	I	Ist das die richtige Reihenfolge?
40	L	Weil wenn man n minus eins rechnet ist das eine Zahl unter n und wenn man das n plus eins rechnet, ist das eine höher, also ist das die richtige Reihenfolge.
41	I	Sehr gut begründet, wunderbar.
42	L	Und wenn das jetzt die drei ist sagen wir mal (*zeigt auf das Kärtchen mit* n), dann müssten drei plus eins vier sein und dann ist das die vier (*zeigt auf das Kärtchen mit* $n+1$) und wenn man n dann minus eins rechnet (*zeigt auf das Kärtchen mit* $n-1$), sind es dann zwei.

Daraus wird deutlich, dass Leonie das Muster in der Beziehung der Zahlen des Zahlentripels erkennt, nämlich, dass die Nachbarn einer beliebigen natürlichen Zahl jeweils um 1 kleiner oder um 1 größer als diese sind. Diese Erkenntnis bringt anscheinend eine Beweisidee mit sich, da die Schülerin eine formale Darstellung des erkannten Musters entwirft. Sie bildet die Summe der drei nacheinanderfolgenden Zahlen und zeigt, dass eine Zahl der Dreierreihe als Ergebnis rauskommt und aus diesem Grunde durch 3 teilbar ist (Abb. 4.27):

$$2+3+4=9$$
$$9:3=3$$
$$4+5+6=15$$
$$15:3=5$$
$$n-1+n+n+1=n$$
$$n:3=n$$

Abbildung 4.27: Aufgabe ZAHLENSUMME: Leonies Lösung

52 I (*Schreibt auf das Blatt* $n-1+n+n+1$) Und wenn man die jetzt zusammenrechnen würde (zeigt auf die Rechnung), würde das die Zahl n ergeben (*vervollständigt die Rechnung mit* $= n$), und diese Zahl würde eigentlich dann (.) in der 3er-Reihe sein, denn wenn man drei zusammenrechnet ist das dann eine Zahl aus der 3er-Reihe, und das ergibt n und die n, n muss man dann durch drei teilen und das ergibt dann n (*schreibt auf das Blatt* $n : 3 = n$).

An dieser Stelle kann man beobachten, dass Leonies völlig korrekte arithmetisch-strukturelle Argumentation noch keine korrekte formale Gestalt findet. Die Schülerin nimmt in ein und demselben Kontext verschiedene Sinnzuschreibungen bezüglich der Variablen n vor: Einmal steht n für eine beliebige Zahl, dann für die Summe dreier Zahlen und schließlich für das Ergebnis der Division der Summe durch 3.

Nikitas Struktur-Rahmung

Nikita nimmt eine *Struktur-Rahmung* an und wählt einen arithmetischen Zugang. Anhand zweier Beispiele überprüft er seine Hypothese, dass die Aussage korrekt ist. Eines der Beispiele ist sein eigenes (50+51+52), das andere erfolgt anhand der Kärtchen (13+14+15) auf dem Tisch. Nach Überprüfung der Aussage verkündet Nikita, ein Muster erkannt zu haben und argumentiert arithmetisch-strukturell mit Hilfe des Kärtchenbeispiels $2+3+4$, wobei er den Begriff „arithmetisches Mittel“ verwendet:

34 N Hier sind drei Zahlen. Wir addieren diese und teilen durch drei. Somit erhalten wir das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Und weil die mittlere Zahl (*zeigt auf die mittlere Zahl 3*) ist Mittelwert von diesen. Und so klappt es immer. Bei 50, 51 und 52 ist es 51, da sie in der Mitte steht. Und das arithmetische Mittel kommt immer raus, weil die Zahlen nacheinander folgen. Sie gehen nacheinander, d. h. es wird immer die 1 dazuaddiert.

Der Schüler greift zu den Zetteln n, $n-1$ und $n+1$, ordnet diese und erklärt seine Handlung:

42 N Weil in der Mitte n, $n-1$ ist der Vorgänger und $n+1$ der Nachfolger, weil sie größer ist.

Schließlich schafft der Schüler den formalen Beweis mit algebraischen Argumenten:

46 N Beim Addieren (*7 sec.*) wird es n plus n plus n (*schreibt* $= n+n+n$ *auf*).
47 I Mmh.
48 N Also ist gleich n plus n plus n. Nun also, wenn wir diese durch drei teilen, kommt n raus.
49 I Ja, stimmt. Und kannst das irgendwie aufschreiben?
50 N Ja (*Klammert die Summe* $n+n+n$ *ein, schreibt dann* $(n+n+n):3=n$).

Signifikant in den Erläuterungen von Nikita ist, dass er neben der von Anfang an angenommenen Struktur-Rahmung eine ausgeprägte Fachsprache verwendet, um seine Erkenntnisse zu beschreiben. Die Art seiner Argumente (Transkriptzeilen 46-50) kann dabei als algebraisch bezeichnet werden, obwohl in seiner Notation ein nichtkonvetioneller Gebrauch des Gleichheitszeichens festzustellen ist (Abb. 4.28).

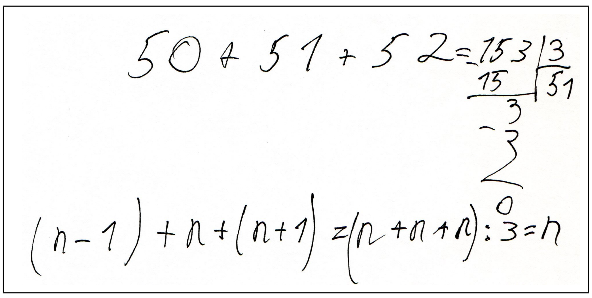


Abbildung 4.28: Aufgabe ZAHLENSUMME: Nikitas Lösung

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen klinischen Interviews ermöglichen es, die ersten Gehversuche der 10-jährigen Kinder auf dem Weg zur Algebra zu beobachten, die Schwierigkeiten und Hürden beim Betreten des „neuen Terrains“ aufzudecken sowie Stadien in der Formierung und Entwicklung des algebraishen Denkens – und insbesondere des Variablenbegriffs – zu erkennen und zu kategorisieren. Die dadurch gewonnenen Erkenntnisse über Vorgehensweisen, Deutungen von Variablen und den Umgang mit symbolischen Ausdrücken sowie zum Argumentationsvermögen der Kinder, verhelfen dazu, die *Zone der nächsten Entwicklung* eines Kindes zu messen. Dieses Kapitel fasst die wichtigsten Ergebnisse der Studie zusammen und stellt auf dieser Grundlage entwickelte Hypothesen vor. Im Anschluss daran folgt ein Vorschlag, wie diese Erkenntnisse in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften implementiert werden können.

5.1 Ergebnisse der Studie

Die im Rahmen der Studie gewonnenen vielfältigen Erkenntnisse werden in diesem Abschnitt dargestellt. Als wichtige Ergebnisse der Analysen werden zunächst das entwickelte Stufenmodell zur algebraischen Denkentwicklung vorgestellt sowie die Stadien des Umgangs mit symbolischen Darstellungen detailliert erläutert. Diese beiden theoretischen Entwicklungsmodelle konnten als interkulturelle Invarianten herausgearbeitet werden. Des weiteren wird die Rolle verschiedener Aspekte im Begriffsbildungsprozess behandelt. Dabei werden insbesondere auch die kulturellen Unterschiede aufgezeigt.

5.1.1 Stufenmodell zur algebraischen Denkentwicklung

Im Prozess der Behandlung von Aufgaben lassen sich unterschiedliche experimentelle und strukturorientierte Vorgehensweisen der Probanden erkennen. Im Rahmen des vorliegenden Forschungsprojektes wurde ein *Stufenmodell* entwickelt, mit dessen Hilfe die algebraische Denkentwicklung näher untersucht werden kann. Als Ausgangspunkt diente die durch die Forschungsgruppe Hefendehl-Hebeker vertretene Auffassung dessen, was unter algebraischem Denken verstanden werden soll, nämlich die Fähigkeit,

- „in arithmetischen Zusammenhängen Strukturen und Formen zu erkennen,
- diese begrifflich und schließlich symbolisch allgemein zu beschreiben
- und schließlich symbolische Ausdrücke regelgeleitet umzuformem und die Ergebnisse sachgerecht zu interpretieren und aus ihnen neue Informationen abzulesen“ (Berlin et al., 2009, 274).

Das entwickelte Stufenmodell stellt eine Verfeinerung und Ausdifferenzierung vor allem der ersten beiden oben erwähnten Etappen dar, bezogen auf die in der Studie erfassten Lösungsprozesse der speziell gewählten Aufgaben. Die Rekonstruktion der Stufen und der mentalen Dispositionen, die ausgebildet sein müssen, damit die nächste Stufe erreicht werden kann, erfolgte unmittelbar aus dem erhobenen Datenmaterial und stellte somit die tragende Grundlage der Hypothesengenerierung dar.

Die systematische Analyse des Datenmaterials lässt Stufen im Prozess der Entwicklung algebraischen Denkens der 10–11-jährigen Probanden erkennen, welche auf zwei Beschreibungsebenen erfasst werden können: der Ebene der Denkhandlung und der Ebene der Ausdrucksweise (vor allem der Sprechhandlung). In diesem Modell werden die beiden Prozesse – Denken und Sprechen – als voneinander getrennte Bereiche beschrieben, aber als parallel laufend angesehen, ohne an dieser Stelle in die historische Diskussion über die Beziehungen zwischen Denken und Sprechen einzusteigen. Die fachdidaktischen Untersuchungsmethoden ermöglichen es nicht, die Denkhandlungen der Kinder direkt wahrzunehmen, sie können nur durch die entsprechenden Sprechhandlungen rekonstruiert werden.

In der Abbildung 5.1 sind die Stufen der algebraischen Denkentwicklung, die im Folgenden erläutert werden, dargestellt. Der Übergang von Stufe zu Stufe erfordert jeweils spezifische mentale Dispositionen. Diese stellen Anforderungen dar und können auch zu Hürden werden, die das Erreichen der nächsten Stufe verhindern.

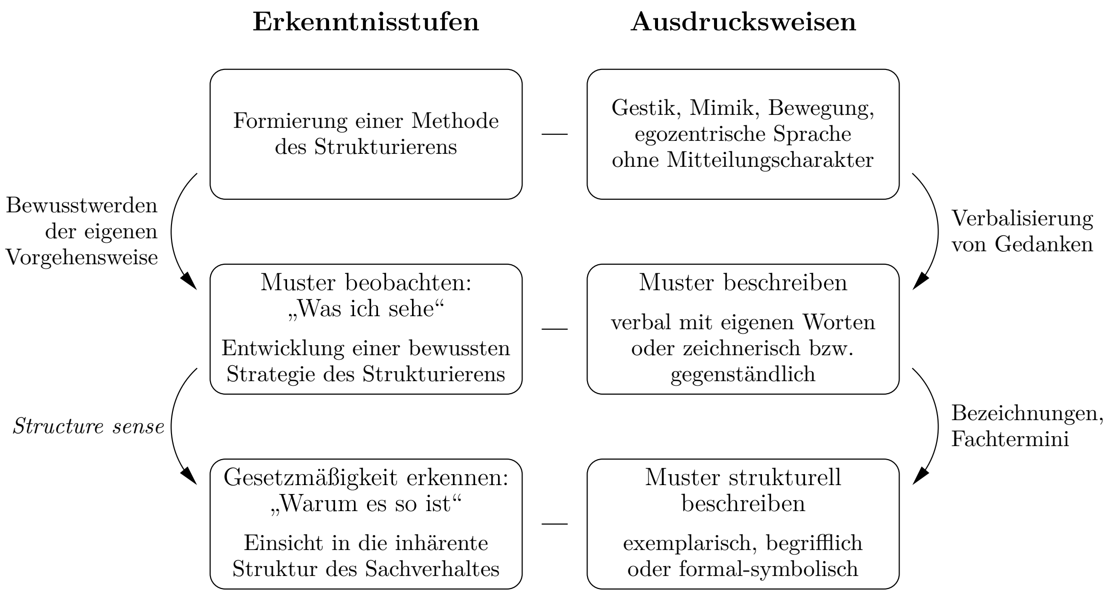


Abbildung 5.1: Stufenmodell: Stufen der algebraischen Denkentwicklung

Diese Übergänge mit den zugehörigen Anforderungen werden in der Abbildung durch beschriftete Pfeile verdeutlicht.

Erkenntnisstufen – Ebene der Denkhandlungen:

Die *Stufe der intuitiven Formierung einer Methode des Strukturierens* zeigt die individuelle Ausprägung der Betrachtungsweise eines Kindes in einem Kontext. Es findet eine intuitive Annäherung an eine Methode des Strukturierens bzw. Abzählens statt, welche dem Handelnden noch unbewusst bleibt, dem Betrachter jedoch durch Gestik, Mimik, Zeigetechnik und evtl. egozentrische Sprache des Kindes sichtbar wird. Dabei kann der Beobachtende einen statischen oder einen dynamischen Ansatz des Kindes anhand dessen Vorgehens feststellen.

Die *Stufe der Entwicklung einer bewussten Strategie des Strukturierens (Muster beobachten)* zeigt das Beobachten einer Gesetzmäßigkeit bzw. eines Musters in einem Kontext. Es wird hier die Frage „Was sehe ich?“ beantwortet. Diese Beobachtung kann durch Betrachtung der ersten Glieder der Zahlenfolge, durch Nutzen der Struktur der Figurenfolge bzw. der Beziehung beider Folgen sowie der systematischen Betrachtung von Zahlenbeispielen erlangt werden. Diese Entwicklungsstufe verlangt ein Bewusstwerden der eigenen Vorgehensweise beim Aufgabenlösen. Das Kind erkennt, dass die Methode des strukturierten Zählens ihm die Bearbeitung der

Aufgabe erleichtert und es setzt sie im weiteren Verlauf bewusst ein. Somit entwickelt sich die unbewusst angenommene Sichtweise zu einer bewussten Perspektive. Die Methode des Abzählens geht über in eine bewusst angewendete Strategie.

Die *Stufe des Erkennens einer Gesetzmäßigkeit* ist durch die Einsicht in die inhärente Struktur des Sachverhaltes gekennzeichnet. Auf dieser Stufe bringt das Kind z. B. bei der Aufgabe KREISE die Figurenfolge und Zahlenfolge in einen Zusammenhang. Es wird ein „Generator“ erkannt, der sowohl auf der Figurenebene als auch der Zahlenebene zum Ausdruck gebracht werden kann, und der auch die Frage beantwortet, warum dieses Erzeugungsprinzip auch weiterhin funktioniert. Dadurch wird es möglich, eine begründete Vorhersage für höhere Folgenglieder zu treffen. Ob das Kind ein Strukturmuster oder ein Veränderungsmuster erkennt, hängt von seiner statischen oder dynamischen Deutung der Situation ab.

Das Hervorheben der Rollen der Zahlen und Operationen in den beobachteten arithmetischen Beziehungen, also das Abstrahieren von konkreten Zahlenwerten ist für diese Stufe charakteristisch. Der Übergang von der Stufe des Beobachtens zu der der Musterekennung verlangt einen *structure sense*.

Ausdrucksweisen – Ebene der Sprechhandlungen:

Die *Stufe der Gestik, Mimik, Bewegung und egozentrischen Sprache ohne Mitteilungscharakter* offenbart die Stufe des Formierens einer Methode. In dieser Stufe der Sprechhandlung kommuniziert das Kind nicht mit dem Beobachter, sondern seine Sprache, Gestik und Zeigetechnik sind unbewusste, unkontrollierte Begleiterscheinungen seiner Denkhandlungen. Diese werden nur vom Außenbeobachter wahrgenommen.

Die *Stufe des Beschreibens des Musters mit eigenen Worten* bringt die Stufe der Musterbeobachtung zum Ausdruck. Die Sprechakte und Handlungen sind hier nicht mehr nur unbewusster Ausdruck der Denkhandlungen, sondern sind gezielt an den Kommunikationspartner gerichtet. Die Beschreibung der Beobachtungen wird dabei jedoch auf die Verwendung der eigenen kindlichen Sprache und Zeigegestik begrenzt.

Auf der *Stufe des strukturellen Beschreibens* wird die Erkenntnis einer Gesetzmäßigkeit artikuliert. Wichtig hierbei ist, dass die Rollen der konkreten Zahlen und Operationen mit ihnen benannt werden. Darüber hinaus kann die Beschreibung exemplarisch an einzelnen Beispielen oder mit Hilfe allgemeiner Begriffe erfolgen.

Hier können ergänzend zum begrifflichen Beschreiben Symbole verwendet werden, um die erlangte Erkenntnis in einer formalen Darstellung auszudrücken. Bleibt ein Kind jedoch auf der vorbegrifflichen Stufe des Beschreibens mit eigenen Worten und gelangt nicht zur Verwendung von Fachbegriffen oder selbst geschaffenen gleichwertigen Ausdrucksweisen, kann es den Schritt zur symbolischen Darstellung nicht schaffen, weil die erforderlichen Konzepte fehlen.

5.1.2 Stadien des Umgangs mit Variablen

Für die Entwicklung der Fähigkeit, theoretisch zu denken, ist nach Wygotski die Beherrschung von wissenschaftlichen Begriffen von großer Bedeutung. Der Variablenbegriff ist einer der zentralen Begriffe der modernen Algebra. Die Einführung dieses Begriffs in der vorliegenden Studie erfolgte nach dem Eulerschen Ansatz, indem die Verwendung der Buchstaben als Repräsentanten von Zahlen vorgestellt wurde. Die Ergebnisse der Untersuchung bestätigen, dass „in dem Augenblick, da das Kind zum erstenmal die Bedeutung eines ihm neuen Wortes (Zeichens) kennenlernt, der Prozess der Begriffsentwicklung nicht endet, sondern erst beginnt" (Wygotski, 1934a, 174). Diese Entwicklung des Variablenbegriffs kommt durch Interpretation und Gebrauch von symbolischen Ausdrücken zum Vorschein.

Die eigens für die Studie konzipierten Aufgaben waren das Ergebnis eingehender und umfassender Vorüberlegungen, die die Beantwortung der Forschungsfragen zum Ziel hatten. Die auf diesen wohlüberlegten Aufgaben basierenden Interviews ermöglichen es, die Stadien des Entwicklungsprozesses in der Bildung des Variablenbegriffs aufzudecken.

Die breite Palette in Deutung und Umgang mit Variablen lässt zwischen vier Stadien im Begriffsbildungsprozess unterscheiden.

Stadium 0: Die Idee der Formalisierung wird (noch) nicht angenommen

In diesem Stadium befinden sich Kinder, die im Umfeld der angebotenen Kontexte die Idee „Buchstaben statt Zahlen" überhaupt nicht annehmen. Dabei kann es durchaus sein, dass diese Kinder die Struktur in einer Bildfolge erkennen und die zu ermittelnden Werte auch für große – aber konkrete – Figurennummern berechnen. Zur Verallgemeinerung eines erkannten Musters werden „große Zahlen" als Metapher für eine generalisierte Zahl verwendet. Kinder rechnen mit diesen Zahlen und betonen gleichzeitig, dass „die Rechnung für alle Zahlen so aufgeht“. Eine mögliche Ursache dafür, dass Kinder die symbolische Darstellung nicht annehmen, kann hier mit Stern (2001) durch die unterschiedlichen Handlungsmöglichkeiten mit Zahlen einerseits und Variablen (Buchstaben) andererseits erklärt werden. Zahlen sind in den Augen der Kinder eng mit den Rechenoperationen verbunden; deren Fokus liegt größtenteils auf dem Ausrechnen von Ergebnissen. Die Untersuchung zeigt, dass die Buchstaben eine solche Möglichkeit des Ausrechnens in den Augen dieser Kinder nicht bieten. Illustriert werden kann es durch folgende typische Äußerung eines Kindes: „Was können wir da denn rechnen? Die Zahl ist unbekannt, das ist das Problem. Wenn ich die Zahl wüsste, könnte ich dann das ausrechnen“. Das Stadium 0 ist somit von einer unüberwindbaren Blockade geprägt: Zahlen sind zum Rechnen da, Buchstaben zum Lesen. Eine Übertragung der Handlungsmöglichkeit (Rechenoperationen) mit Zahlen auf Buchstaben findet nicht statt.

Stadium 1: Symbolisches Beschreiben – Variable und symbolische Ausdrücke werden zur Beschreibung eines erkannten Musters herangezogen

Die in diesem Stadium befindlichen Kinder meistern es, eine gegebene Situation allgemein formal zu beschreiben, auch wenn die Form des Ausdruckes nicht immer ganz den Konventionen entspricht. Dazu ist es allerdings erforderlich, dass Lernende die Idee wahrgenommen haben, dass die Buchstaben in der Mathematik losgelöst von ihrer ursprünglichen sprachlichen Funktion verwendet werden. Es gelingt den Kindern, eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen und diese formal zu beschreiben. Die darin verwendeten Variablen sind allerdings fest mit dem Sinn verbunden, den die Kinder hineinlesen. Es können beispielsweise Vorstellungen wie „n steht für die Figurennummer“ gebildet werden; damit trägt n eine ganz bestimmte Information, die an die Situation gebunden is, wird aber nicht als frei verfügbare Rechenzahl wahrgenommen. Hier stellt jedoch die Transformation des eigenen Terms bzw. das Operieren mit symbolischen Ausdrücken eine unüberwindbare Hürde dar.

Die Ursache dieser Schwierigkeit kann in einer engen Verbundenheit des erstellten Terms und den darin verwendeten Symbolen mit der Entstehungsgeschichte dieses Terms liegen. Bei der Aufstellung eines Terms bilden sich bei den Kindern bestimmte Vorstellungen der Situation heraus (Sichtweisen) und die Kinder übersetzen diese Sichtweise in die formale algebraische Sprache. „Producing an algebraic text is a sense-making labour“, wie Radford & Puig (2007, 160) treffend formuliert haben. Der erstellte Term „erzählt“ auf unterschiedliche Weise die Geschichte über ein Objekt: von der Strukturbeschreibung bzw. der Objektentstehung. Jede Transformation des Terms, wie etwa die Änderung der Reihenfolge der Summanden bei einer Addition oder die Änderung der Operation an mehreren Termen (z. B. Addition zweier Terme), führt zu einer inneren Konfliktsituation, in der der „Autor der Geschichte“ die Bedeutung der Ausdrücke nicht mehr nachvollziehen kann. Dies erfordert nämlich einen weiteren Abstraktionsschritt: das Loslassen des Bezugs des Terms zu einer konkreten Geschichte und die Betrachtung des Terms als symbolischen Ausdruck, welcher mit unterschiedlichem Sinn gefüllt werden kann.

Die Analyse des Datenmaterials der vorliegenden Untersuchung hat zur Differenzierung dieser Schwierigkeit beigetragen, denn den unterschiedlichen Deutungen der Variablen liegen unterschiedliche Vorstellungen einer gegebenen Situation zugrunde. Es können zwei völlig verschiedene Sichtweisen – eine dynamische und eine statische – beobachtet werden, die wir exemplarisch an der Aufgabe KREISE betrachten.

Bei einem dynamischen Ansatz wird der Buchstabe n als Figurennummer in einer Figurenfolge gedeutet. Man merkt, dass von Figur zu Figur immer zwei neue Kreise dazu kommen und stellt fest, dass die Anzahl der insgesamt dazukommenden Kreispaare bis zu einer bestimmten Figur stets um Eins geringer als die Figurennummer bleibt. Für die Figurennummer 4 erstellt ein Kind den Term $4 + 3 \cdot 2$ und für die 50ste Figur seiner Beobachtung entsprechend den Term $4 + (50 - 1) \cdot 2$. Diese Erkenntnis wird auf die höheren Zahlen übertragen und führt zur Verallgemeinerung der erkannten Gesetzmäßigkeit. So ensteht der Term $4 + (n - 1) \cdot 2$ als eine in formale Sprache übersetzte Geschichte. Die Variable n tritt somit in dem Term $4 + (n - 1) \cdot 2$ als Vervielfacher von 2 auf, denn der Buchstabe n wird zur Beantwortung der Frage „Wie viele Zweier kommen dazu?“ verwendet.

Bei dieser Sichtweise wird die Addition von Termen, wie z. B. $n+0$ und $n \cdot 2+2$ (Lauras Terme für die Anzahl der gelben bzw. blauen Kreise aus der Fallstudie zur Aufgabe KREISE), derart durchgeführt, dass zwar mit Zahlen operiert, der als Figurennummer gedeutete Buchstabe n jedoch unberührt übernommen wird. So konstruiert das Kind den Term $2 \cdot n + (2 + 0)$ mit der Begründung, dass der Buchstabe „schon da steht“. Da es sich bei dieser Operation um dieselbe Figur handelt und die Figurennummer konstant bleibt, ist ein solches Vorgehen in den Augen des Kindes auch stimmig.

Bei einem statischen Ansatz wird der Buchstabe n als Anzahl der Kreise an bestimmten Teilen einer Figur der Bildfolge gedeutet (vermutlich sehen die Kinder auch hier einen Bezug zur Figurennummer, aber dieser ist sekundär). Diese Sichtweise erlaubt die Addition der Terme n und $n + n + 2$ als in symbolischer Sprache erzählte Geschichte des Vorgehens: „Ich addiere die mittleren mit den oberen und den unteren Kreisen und füge anschließend 2 Kreise an den Enden einer Figur hinzu.“ So entsteht der Term $n + n + n + 2$ für die Gesamtanzahl der Kreise an einer Figur. Jedoch bereitet manchen Kindern auch hier das Operieren mit symbolischen Ausdrücken Schwierigkeiten. Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Anzahl von Kreisen unbekannt ist. Dadurch bleibt auch das Resultat des Addierens weiter unbekannt, so entsteht die „Rechnung“: $n + n + n + 2 = n$. Das Konzept, das n als zwar unbekannte, aber dennoch individuelle Zahl betrachtet werden muss, ist noch nicht ausgeprägt.

Stadium 2: Symbolisches Operieren – das erworbene Wissen wird reorganisiert

Dieses Stadium ist durch das Operieren mit symbolischen Ausdrücken gekennzeichnet. Kinder, die dieses Stadium erreichen, sind in der Lage, nach dem Erstellen eines Terms zur Beschreibung einer Situation einen weiteren Abstraktionsschritt zu gehen und sich von einer konkreten Geschichte zu lösen. Operiert wird mit symbolischen Ausdrücken nach arithmetischen Konventionen: ein Term wird umgeformt, z. B. wird die Summe $n + n + n$ durch das Produkt $n \cdot 3$ ersetzt, oder es werden zwei Terme wie z. B. n und $n \cdot 2 + 2$ addiert mit dem Ergebnis $n \cdot 3 + 2$. Dazu kann das Kind erst gelangen, wenn es die Möglichkeiten des arithmetischen Operierens mit Zahlen auf Symbole (Variablen) übertragen kann. Auf diesem Wege wird die streng situationsbezogene Sinnzuschreibung einer Variablen bzw. eines Terms aufgeweicht, was einem Kind erlaubt, den Buchstaben n als generalisierte Zahl zu interpretieren und seinen Term zu transformieren, indem es die Addition von drei gleichen „Zahlen“ durch das dreifache dieser Zahl ersetzt. So gelingt es einem Kind, von dem Term $n + n + n + 2$ zu dem Term $n \cdot 3 + 2$ überzugehen.

Die zu einer solchen Reorganisation des vorhandenen Wissens benötigten Denkhandlungen des Generalisierens und Abstrahierens sind maßgebend für die Weiterentwicklung des Variablenbegriffs, welcher dieses Stadium charakterisiert. Erst wenn es der „Entstehungsgeschichte eines Terms“ nicht mehr verhaftet bleibt, ist ein Kind in der Lage, eine algebraische Rahmung anzunehmen und durch Termumformungen sein eigenes Vorgehen mit dem anderer Kinder auf formaler Ebene abzugleichen. Der innere Konflikt hat sich hier aufgelöst und der rein formale Weg ermöglicht es einem Kind, ökonomisch über die „Richtigkeit“ der Terme anderer bzw. über die Äquivalenz zum eigenen Term zu urteilen, ohne die fremden Sichtweisen verstehen zu müssen.

Stadium 3: Die formale Sprache wird zum gedanklichen Werkzeug und zum Instrument des Argumentierens

Kinder, die dieses Stadium der Entwicklung des Variablenbegriffs erreichen, behandeln eine Variable als vertrautes Objekt und beherrschen die symbolische Sprache weitgehend „fließend“. Bei Behandlung der Aufgaben zur Erkennung der Gesetzmäßigkeiten in Figurenfolgen wird ein erkanntes Muster zunächst unter Verwendung einer Variablen in Form eines Terms verallgemeinert. Anschließend wird der aufgestellte Term zur schnellen und zuverlässigen Anzahlbestimmung bei beliebigen Figurennummern durch das Einsetzen einer entsprechenden Zahl für diese Variable verwendet. Ein aufgestellter Term hat sich hier verselbständigt: die ursprüngliche „Entstehungsgeschichte“ wird – im Gegensatz zum ersten Stadium – nicht mehr in Betracht gezogen.

Kinder dieses Stadiums wenden die Symbolsprache in unbekannten Situationen an – wie bei der Aufgabe ZAHLENSUMME – um die eigene Hypothese zu beweisen. Durch Anwendung der formalen Sprache werden neue Erkenntnisse gewonnen und gleichzeitig bewiesen, indem man die Aufgabensituation unter Verwendung der symbolischen Sprache zunächst „übersetzt“, den aufgestellten Term umformt und das Ergebnis interpretiert. So zeigt ein Kind, dass bei der Division der Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen durch drei sich stets die mittlere Zahl als Ergebnis ergibt:

$$[(n-1)+n+(n+1)] : 3 = (n+n+n) : 3 = n.$$

Dieses Stadium des Instrumentalisierens der Symbolsprache setzt eine bewusste Kontrolle über die Möglichkeiten des Umgangs mit Zahlen und Variablen voraus. Die algebraischen Ausdrücke werden als vertraute Objekte behandelt; die Formelsprache als gedankliches Werkzeug und Mittel der Argumentation verwendet.

5.1.3 Die Rolle der Arithmetik

Traditionell folgt die Einführung der Algebra in der Schulmathematik auf die Arithmetik, was dazu führt, dass an die Arithmetik gewisse Anforderungen bezüglich der Algebra gestellt werden können. Denn Algebra kann bezeichnet werden als „*metaarithmetic* or, more precisely, as the *unification of arithmetic with its own metadiscourse*. Its power is in the names that reify and unify whole classes of computational processes and at the same time tell the exact story of the processes themselves“ (Sfard, 2008, 120).

Der Mathematikunterricht der Grundschule zielt darauf ab, den Kindern den Umgang mit Zahlen zu vermitteln. Der Fokus liegt dabei überwiegend auf dem Rechnen als Tätigkeit und der Zahl als Endergebnis dieser Tätigkeit. Es werden Methoden vermittelt, um durch geschicktes Rechnen schnell zu einem Ergebnis zu gelangen. Oftmals ist unter dem geschickten Rechnen ein ökonomisches Ausrechnen gemeint. Beim Berechnen etwa der Summe von $4 + 3 + 6$ erfahren Kinder, dass es ökonomisch leichter und sinnvoller ist, zunächst die Summe von 4 und 6 zu bilden und anschließend erst die 3 hinzu zu addieren. Zwar wird hier bereits ein strukturierter Blick auf die Summe eingenommen, jedoch bleibt das Hauptaugenmerk noch auf dem Rechenergebnis. Die Kinder trainieren schnell und geschickt zu rechnen, wobei die Rechenoperationen oft im Kopf durchgeführt werden. Auch spielerische Wettbewerbe im Mathematikunterricht tragen häufig dazu bei, dass bei Kindern der Eindruck entsteht schnell Kopfrechnen zu können sei gleichzusetzen mit „in Mathe gut zu sein“.

Die Tatsache, dass der Prozess des Operierens mit Zahlen für Kinder einen Prozess des Ausrechnens darstellt, hat folgende Konsequenzen:

Zum einen wird eine Einsicht in die Struktur der Rechnung verhindert, was die Verallgemeinerung erschwert. Da die Rechenschritte nicht aufgeschrieben werden, steht lediglich das Resultat in Form einer Zahl im Fokus der Betrachtung da; die innere Struktur bleibt jedoch verborgen (wie z. B. in der Aufgabe DREIECKE). Man braucht ein Werkzeug, um Unsichtbares sichtbar zu machen, denn z. B. macht erst die Zerlegung des Lichts durch Anwendung eines Prismas das Spektrum sichtbar. In der Biologie werden Mikroskope zur Beobachtung von organischen Substanzen verwendet, die mit bloßem Auge nicht zu erkennen sind. Als solches Werkzeug zur Mustererkennung kann beim Übergang von Arithmetik zur Algebra die Verschriftlichung der Rechenwege dienen, indem arithmetische Terme als Kurzprotokolle von Rechenstrategien aufgestellt werden. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass Kinder beider Länder beim Dokumentieren der Rechenschritte mangelnde Erfahrungen aufweisen. Treten in den hier untersuchten Schülerlösungen dokumentierte Rechenschritte auf, so handelt es sich bei den deutschen Kindern um die Notation einzelner Rechenschritte. Die russischen Kinder dagegen bringen aus dem Mathematikunterricht der Grundschule die Erfahrung mit, einzelne Rechenschritte in Form eines arithmetischen Terms darzustellen. Solche Notationen ermöglichen es, die Rollen einzelner Zahlenwerte zu erkennen, was den Schritt zur Verallgemeinerung und symbolischen Darstellung erleichtert.

Zum anderen verhindert die Fokussierung auf das Ergebnis einer Rechnung die Entwicklung der Fähigkeit, ein „mathematisches Objekt in verschiedenen Rollen zu sehen“ (Hefendehl-Hebeker, 1999, 109), z. B., dass das Produkt $a \cdot b$ sowohl als Vielfaches von a als auch als Vielfaches von b gedeutet werden kann. Dieser algebraische Blick kann im Arithmetikunterricht dadurch propädeutisch vorbereitet werden, dass Kinder ein Produkt wie $5 \cdot 2$ nicht nur als ergebnisgleiches Objekt zu $2 \cdot 5$ sehen, sondern in diesen Ausdrücken sowohl ein Vielfaches von 5 $(5 + 5)$, als auch ein Vielfaches von 2 $(2 + 2 + 2 + 2 + 2)$ sehen (vgl. ebd.,107).

Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass das Fehlen genau dieser Fähigkeit – ein mathematisches Objekt in verschiedenen Rollen zu sehen – bei vielen Kindern das Operieren mit Termen erschwert bzw. verhindert hat (vgl. hierzu etwa die Fallstudie Laura Aufgabe KREISE).

Wird Algebra in ihrer Einführungsphase in der Schulmathematik als Metaarithmetik verstanden, so müssen die Schüler bereits in der Arithmetik Erfahrungen sammeln können, in ihren mathematischen Tätigkeiten eine strukturierte Sichtweise einzunehmen. Dazu gehören Denkhandlungen wie beobachten, vergleichen, deuten, Beziehungen herstellen, ordnen und verallgemeinern.

5.1.4 Die Rolle der Gestik

Die Analyse der vorliegenden Untersuchungsergebnisse hat gezeigt, dass der von Sfard (2009, 195) eingeführte Begriff „*commognition*“ nun sinnvoll dahingehend erweitert werden kann, dass der Schritt einer sogenannten *Eigenkommunikation* vorgeschaltet ist. Dies beschreibt den Prozess der Auseinandersetzung eines Einzelnen mit seinen eigenen Gedankengängen und seiner eigenen Körpersprache.

In der eigenen Körpersprache (Gestik, Zeigetechnik, Augenbewegungen) liegt oftmals der Schlüssel zur Lösung der vorgegebenen Aufgabe. Die Körpersprache bewegt sich auf einem unterbewussten Level, kommt also überwiegend intuitiv zur Anwendung. Im Verlauf dieser Studie konnte die Anwendung der Körpersprache bei nahezu allen Probanden beobachtet werden. Dabei kam die jeweilige Betrachtungsweise zum Vorschein: die dynamische Betrachtungsweise durch rhythmische prozessbeschreibende Handbewegungen, die statische Betrachtungsweise durch gerichtetes Zeigen auf einen bestimmten Teil der Figur einer Figurenfolge. Die Körpersprache ist Ausdruck einer intuitiven Erkenntnis und kann als vorsprachliches Stadium des Explizitmachens charakterisiert werden. Das fehlende Bewusstwerden eigener Körpersprache verhindert häufig die Entwicklung einer Lösungsstrategie und stellt eine Hürde auf dem Weg zur Generalisierung und damit auch zur Formalisierung dar.

An dieser Stelle kann eine Parallele zu Wygotskis Ausführungen zur autonomen Kindersprache gezogen werden. Die Phase der autonomen Kindersprache wird von Wygotski als Übergang von einer vorsprachliche Periode der Kommunikation zur Periode, in der das Kind erste Sprachkenntnisse erwirbt, gesehen. Sowohl in der Phonetik, als auch in der Semantik unterscheidet sich die autonome Kindersprache von der Sprache der Erwachsenen. Der semantische Unterschied besteht in der sich stets wechselnden, unbeständigen und situationsgebundenen Bedeutung der Worte. Die Gesten stellen in dieser Phase einen Sprachersatz dar (vgl. Papadopoulos, 1999, 106). Die während der Interviews dieser Studie gemachten Beobachtungen zeigen, dass durch Gesten die durch das Kind eingenommene Sichtweise erkennbar wird. Im Fall des Selbstbeobachtens kann diese Gestik den Übergang von der unbewussten Sichtweise zu einer bewusst gewordenen Perspektive unterstützen.

5.1.5 Die Rolle der Sprache

Die Ergebnisse der Interviewanalysen zeigen, dass eine große Mehrheit von Probanden keine Probleme bei der Beobachtung einer Gesetzmäßigkeit und dessen verbaler Beschreibung hat. Allerdings erfolgt diese Beschreibung oft wie ein „Wasserfall“, ohne strukturelles und begriffliches Beschreiben eines Musters, also ganz an der „Oberfläche“. Freudenthal (1977, 35) äußert sich unmissverständlich zur Bedeutung der Fachsprache bei der Beschäftigung mit Mathematik: „Wo man etwas anschaulich illustrieren kann, kommt man mit schlampigen sprachlichen Mitteln aus; je abstrakter, d. h. je weiter entfernt von der Anschaulichkeit der zu behandelnde Stoff ist, desto sorgfältiger muß der sprachliche Ausdruck sein“. Die Analysen der Ergebnisse im Ländervergleich haben eindrucksvoll gezeigt, dass die russischen Probanden im Gegensatz zu den deutschen überwiegend Fachsprache verwenden, indem sie bei ihren Beschreibungen die Funktionen (die Rollen) der Zahlen in den Operationen durch Fachtermini explizit hervorheben.

„Die bewußte Beschäftigung mit der Sprache als exaktem Ausdrucksmittel nennt man auch Formalisierung. Sie ist eines der Organisationsmittel der modernen Mathematik“ (Freudenthal, 1977, 36). Somit bringt Freudenthal die Formalisierung in eine enge Verbindung mit der Sprache und hebt ihre Bedeutung für das gedankliche Organisieren und Präzisieren hervor.

5.1.6 Die Rolle des Materials

Die Vielfältigkeit des in den Interviews eingesetzten Materials und der dadurch initiierten Handlungen der Kinder führt zu interessanten Beobachtungen bzgl. der Auswirkung von Material auf Mustererkennung und Argumentation. Vielen Kindern scheint die Argumentation bei der Bearbeitung der Aufgabe WÜRFELSCHLANGE leichter zu fallen als bei der Aufgabe KREISE. Da sich die beiden Aufgaben nur in der Oberfläche unterscheiden und im Grunde eine gleiche Struktur aufweisen – beide Situationen können schließlich durch den Term $n \cdot 3 + 2$ beschrieben werden – kann dieses Phänomen durch den Unterschied in den Handlungsmöglichkeiten erklärt werden. Diese Beobachtung deckt sich mit den Beobachtungen, die Merschmeyer-Brüwer (2002, 45) im Rahmen ihrer Untersuchungen räumlicher Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen gemacht hat: „So erfordert das Nachbauen weniger Kompetenz zur Strukturierungskoordination als Argumentieren oder Analysieren durch Beobachten ... weil die Kinder durch den Einsatz ihrer Hände (z. B. als Markierungshilfe bzw. als Setzen eines Bausteins) einzelne Strukturierungsschritte extern festhalten können“.

Man kann diese These durch zwei weitere wichtige Aspekte erweitern. Zum einen erfolgt die Entstehung einer Zahlenfolge schrittweise und stets parallel zum Nachbauen einer Würfelschlange, da zunächst keine Bild- bzw. Würfelfolge vorhanden ist. Die parallele Entstehung bringt eine engere Verbindung zwischen diesen Folgen mit sich, was wiederum den Prozess des Bewusstwerdens des eigenen Vorgehens erleichtert. Eine Sichtweise erfährt somit Unterstützung und entwickelt sich zu einer bestimmten Perspektive und einer bewussten Zählstrategie. Auch wird die visuelle Hilfe nicht nur durch drei abgebildete Figuren begrenzt: man kann die Würfelschlange so lange wachsen lassen, bis einem ein Muster ins Auge fällt. Zum anderen, wird die Dynamik des Vorgehens durch Hantieren mit konkreten Gegenständen sichtbarer. Man könnte meinen, dass das Zeichen einer Figurenfolge denselben Effekt hätte. Aber es ist wohl aufwändiger, weil man für jede Figur der Folge neu beginnen muss, und weil auch die Detailschritte zeitintensiver sind. Zudem ist die zeichnerische Darstellung weniger flexibel, weil man nicht so einfach Schritte rückgängig machen kann. Somit eröffnet dieses Aufgabenformat der Würfelschlage – im Gegensatz zur Aufgabe KREISE – neben Zeige- und Markierungsmöglichkeiten auch eine für die dynamische Sichtweise wichtige Handlungsmöglichkeit.

5.2 Hypothesen zum Algebraunterricht

Die Ergebnisse der Studie geben Anlass zu Hypothesen, die

- einerseits für einen frühen Einstieg in die Algebra plädieren (Hypothesen 1 und 2) und
- andererseits didaktisch-methodische Leitideen füe das Verstehen des Zusammenspiels von Syntax und Semantik in der Algebra vermitteln (Hypothesen 3 und 4).

Hypothese 1

Die Einführung des Variablenbegriffs und der formalen algebraischen Sprache ist in altersgerechter Form schon bei zehnjährigen Kindern möglich und trägt zu ihrer mathematischen Habitualisierung bei.

Das theoretische Denken basiert auf Begriffen und Konzepten, die nicht ohne weiteres vermittelt werden können, sondern von den Lernenden eigenständig konstruiert werden müssen. Dieser Prozess benötigt eine angemessene Zeit der Reifung. Die Studie hat gezeigt, dass schon 10–11-jährige Kinder mit Verallgemeinerungen und formalen Beschreibungen arbeiten können, dass also diese Konzepte zur Zone der nächsten Entwicklung gehören.

Innerhalb dieses Rahmens hängt es vom persönlichen Entwicklungsstand ab, ob ein Kind die erlernten formalen Darstellungsmittel bereits selbständig als Werkzeug benutzen kann oder ob es noch eine Zeit der Gewöhnung braucht. Die erstgenannte Gruppe von Kindern hat eine entsprechende Förderung verdient: „Der Lernprozess könnte sogar gestört und zum Stillstand gebracht werden, wenn dem Schüler nicht die Gelegenheit gegeben wird, im Stufenaufbau fortzuschreiten“ (Freudenthal, 1977, 120). Die zweite Gruppe kann nach dem Grundsatz der Binnendifferenzierung in denselben Lernumgebungen weiter wachsen.

Dieses Plädoyer kann auf Parallelen in Aufbau des Zahlensystems verweisen. Lange Zeit hat man Bruchrechnung kompakt in Klasse 6 behandelt und mit der Einführung der negativen Zahlen in Klasse 7 begonnen. Inzwischen werden Teilgebiete aus beiden Bereichen in wohl dosierter Form und mit Gewinn in früheren Klassen behandelt.

Hypothese 2

Ein Mathematikunterricht im Sinne von Hypothese 1 erzeugt eine strukturelle Sicht, die auch zur Entwicklung eines Beweisbedürfnisses führt, wobei Beweisverfahren wie Deduktion und vollständige Induktion auf unterschiedlichen Ebenen – verbal, enaktiv und symbolisch – bereits bei zehnjährigen Kindern altersgerecht thematisiert werden können.

Das Beobachten von Zahlenbeziehungen wie z. B. in der Aufgabe ZAHLENSUMME führt zur Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten, die symbolisch, aber auch auf der strukturellen Ebene verbal oder handelnd belegt werden. Die Untersuchungen zeigen, dass Lernende unterschiedliche Beweisansätze verwenden, um ihre Annahmen zu begründen. Da Mathematik eine beweisende Wissenschaft ist, müssen die durch die Schüler selbst gegebenen Vorlagen genutzt werden, um unterschiedliche Beweisverfahren zu thematisieren. Die Schüler fühlen sich in ihrer Vorgehensweise bestätigt, was zu einer Stärkung ihres Selbstwertgefühls führen kann.

Kindern, die im o. g. Sinne bereits in der Lage sind, formale Darstellungsmittel als weiterführende Werkzeuge zu benutzen, kann zusätzlich gezeigt werden, dass Algebra einen anderen Weg bietet, Erkenntnisse auf symbolischer Ebene zu gewinnen. Eine Aussage zur Zahlenbeziehung wie z. B. in der Aufgabe ZAHLEN-

SUMME wird symbolisch beschrieben und stellt im Sinne von Peirce ein Diagramm dar. Durch regelgeleitetes Manipulieren an Diagrammenketten im Sinne von Wittgenstein können Erkenntnisse zugleich gewonnen und begründet werden.

Hypothese 3

Das Entwickeln eigener symbolischer Darstellungen für erkannte Strukturen und ihre Erklärung sowie die Argumentation für die Richtigkeit von induktiven Annahmen tragen zum Verstehen der Semantik der algebraischen Sprache bei.

Ein sinnerfüllter Umgang mit der formalen algebraischen Sprache wird erst dann möglich, wenn einem die eigene Vorgehensweise bewusst und die Bedeutung der verwendeten Symbole deutlich wird. Im Mathematikunterricht findet hierzu ein Ideenaustausch statt, wobei persönliche Sichtweisen kommuniziert werden. Das verlangt einen präzisen Umgang mit der Verbalisierung der eigenen Gedanken und regt zur Argumentation an. Die Argumentation kann z. B. durch Aufgaben zum Erkennen und Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten in Figurenfolgen initiiert werden.

Hypothese 4

Die Überprüfung der formalen Gleichwertigkeit unterschiedlicher symbolischer Darstellungen zur Beschreibung ein und desselben Sachverhaltes trägt zum Verstehen der Syntax der algebraischen Sprache bei.

Die beobachteten strukturellen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten können in unterschiedlichen symbolischen Darstellungen ausgedrückt werden. Ohne in die Geschichte der Entstehung des Terms bzw. der Referenzebene einzusteigen, können zwei Terme zu einem gleichen Sachverhalt durch rein formales regelgeleitetes Manipulieren auf ihre Gleichwertigkeit hin überprüft werden. Die Termumformungen erscheinen als sinnvolle mathematische Tätigkeit.

5.3 Konsequenzen für Ausbildung und Unterricht

Die Erkenntnisse der Studie erlauben zwar keine allgemeinen Schlussfolgerungen auf den Unterricht zur Einführung in die Algebra, bieten aber erste wichtige Ausblicke auf die didaktischen und methodischen Anforderungen an Lehrkräfte und die daraus resultierenden Inhalte der Lehrerausbildung einerseits, auf die unterrichtliche Konzeption zur Propädeutik und Einführung der Algebra im Mathematikunterricht andererseits.

5.3.1 Die Rolle der Lehrkraft

Bewusstwerden des eigenen Vorgehens ist vor allem am Anfang des Algebraunterrichts eng mit der Rolle des Lehrers als „Geburtshelfer" verbunden, der „uns von unseren eigenen Gedanken" entbindet, „nicht von den seinen" (vgl. Freudenthal, 1977, 98). Auch Wygotski (1926, 82) betonte, dass der Lernprozess auf der kindlichen Eigentätigkeit basieren soll, wobei der Lehrende sich auf die Rolle des Begleiters beschränkt. Somit übernimmt der Lehrende im Sinne von Wygotski und Freudenthal die Rolle eines interaktiven Spiegels, indem er den Entstehungsprozess des mathematischen Wissen eines Lernenden reflektierend begleitet. Dieses Fremd-Reflektieren kann mit der Zeit in das Eigen-Reflektieren, also in Metakognition, übergehen, was wiederum die Verwandlung der Zone der nächsten Entwicklung in den aktuellen Entwicklungsstand gewährleistet. „Solange das Kind nicht über seine Tätigkeit reflektieren kann, ist die höhere Stufe nicht zugänglich" (Freudenthal, 1977, 123).

Die dargestellten Fallstudien sowie die Gesamtergebnisse der Interviewanalysen belegen, dass die untersuchten Kinder zu Erkenntnissen auf verschiedenen individuellen Wegen gelangen. Die Lehrkräfte sind demnach aufgefordert, an diese persönlichen Vorgehensweisen der Lernenden anzuknüpfen und den Kindern zu ermöglichen, die algebraische Formelsprache als Mittel des Denkens und des Selbstausdrucks sowie des Konstruierens von Wissen zu erleben (vgl. Berlin, 2007, 25). Als eine der wichtigsten Anforderungen an Lehrende kommt die Forderung zur Anregung von metakognitiven Aktivitäten der Lernenden: „Lehrkräften kommt die unverzichtbare Aufgabe des Anleitens, Beratens, Unterstützens und Sicherstellens bei der angestrebten Kultivierung von Metakognition zu" (Sjuts, 2003, 20). Dabei soll berücksichtigt werden, dass man für das Lernen eine gewisse Gewöhnungszeit braucht und eine Entwicklung zu durchlaufen hat: „Gönnen wir den Lernenden das, was ... Mathematikern alltäglich ist. Erlauben wir ihnen Inskriptionen zu erfinden und zu verwenden, damit sie sich selbst bei der Konstruktion Ihrer Lösung zusehen und erfolgreich sein können" (Kadunz, 2006, 237).

Solche subjektive Erfahrungen sind für Lernende nicht hoch genug einzuschätzen, denn „Some students only experience other people's algebra, without being encouraged to use algebra to express their own generality, to manifest their own inner perceptions in written form“ (Mason, 1987, 76). Die Untersuchungsergebnisse untermauern das Bild eines Unterrichtsprozesses, in dem die Schüler vom Lehrer in die „intellektuelle Werkstatt“ der Entstehung von Formeln eingeführt werden, wo ständig unerwartete Schwierigkeiten auftauchen, wenn der erarbeitete Begriff zur Wirklichkeit in Beziehung gesetzt wird. „Es wird die Methode des Konstruierens von Begriffen entwickelt“ (Dawydow, 1977, 361).

5.3.2 Mathematikunterricht

Vor dem Hintergrund der empirischen Befunde zum algebraischen Denken bietet diese Studie einige Anforderungen im Hinblick auf den Mathematikunterricht:

1. Arithmetik in der Grundschule sollte auch unter der Perspektive „strukturelle Arithmetik“ unterrichtet werden, damit die Grundlagen für das Algebralernen gelegt werden. Dabei sollten solche Aktivitäten wie Erkennen von Mustern und Beziehungen, strukturelles Beschreiben der Beobachtungen sowie das arithmetisch-strukturelle Argumentieren initiiert werden. Aus propädeutischer Sicht ist es erforderlich, dass neben den Rechnungen arithmetische Terme als Kurzprotokolle von Rechenstrategien aufgestellt und mit Einbezug der Fachsprache verbalisiert werden.
2. Die ersten Begegnungen mit Variablen können schon in die früheren Schulstufen (z. B. in die Jahrgangsstufe 5) verlagert werden. Hierbei ist eine in der Zeit individuell gestreckte Entwicklungsphase zu berücksichtigen, damit die Lernenden sich an die neuen Möglichkeiten des Symbolisierens und algebraischen Argumentierens gewöhnen können.
3. Es sollten Lernumgebungen im Unterricht angeboten werden, die einerseits individuelle Wege bei der Konstruktion des neuen Wissen, andererseits eine Bereicherung für die Unterrichtsteilnehmer auf der intersubjektiven Ebene durch den Austausch von verschiedenen Lösungsansätzen, Formulierungen und Darstellungen ermöglichen. Denn der „Mathematikunterricht sollte möglichst positive Erfahrungen mit dem Fach vermitteln. Er sollte Interesse wecken, die Gedanken anregen und Klarheit als intellektuellen Wert er-

lebbar machen“ (Hefendehl-Hebeker, 2003, 109). Gute Grundlage für solche Lernumgebungen bieten die Aufgaben zum Erforschen von arithmetischen Zahlenbeziehungen sowie zur Anzahlbestimmung der Elemente in geometrischen Figurenfolgen und der Beschreibung der erkannten Gesetzmäßigkeiten – zunächst verbal, dann durch konkrete Zahlenbeispiele und anschließend allgemein mit Hilfe von Symbolen.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1994). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Bd. II: Denkprozesse. 2. Auflage.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (2001). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Bd. I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. 3. Auflage.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42–47.

Arcavi, A. & Schoenfeld, A. (1988). On the Meaning of Variable. *The mathematics teacher*, 81(6), 420–427.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In *Lernen und Lehren von Mathematik*, volume 6 (pp. 1–56). Köln: Aulis.

Bauersfeld, H. (2004). Muster erkennen, pattern imagery, Zahlensinn. In G. Krauthausen & P. Scherer (Eds.), *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik* (pp. 15–22). Donauwörth: Auer.

Bauersfeld, H. (2007). *Für kleine Mathe-Profis: 100 Aufgaben für die Partner- und Einzelarbeit im 2.-5. Schuljahr mit ausführlichen didaktischen Hinweisen und Lösungen.* Köln: Aulius Deubner.

Bednarz, Kieran, & Lee (1996). Approaches to Algebra. In Bednarz et al. (Ed.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Berlin, T. (2007). Metakognition als Schlüssel zur Einführung der algebraischen Formelsprache. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan, & A. Fischer (Eds.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Berlin, T., Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema - zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (pp. 271–292). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Bertalan, D. (2007). Buchstabenrechnen? In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan, & A. Fischer (Eds.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Bohnsack, R. (2008). *Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in qualitative Methoden*. Opladen & Farmington Hills: Budrich, 7. edition.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20–32). National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. (1989). A Question of Structure. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 57–59). Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics; NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evalution für Human- und Sozialwissenschaftler. 4., überarb. Auflage*. Heidelberg: Springer.

Dawydow, W. W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Logisch-psychologische Probleme des Aufbaus von Unterrichtsfächern*. Berlin: Volk und Wissen.

Dawydow, W. W. (1996). *Problemy rasvivajuschego obuchenija*. Moskau: ACADEMA, (2004) edition.

Dettori, G. & Garuti, R. & Lemut, E. (2001). From Arithmetic to Algebraic Thinking by using a Spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, &

R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191–207). Kluwe Academic Publishers.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 40, 143–160.

Ericsson, K. & Simon, H. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review*, 87(3), 215–251.

Ericsson, K. & Simon, H. (1987). Verbal Reports on Thinking. In Faerch and Kasper (Ed.), *Introspection in Second Language Repoert* (pp. 24–81). Clevedon, Philadelphia: Multiligual Matters LTD.

Ericsson, K. & Simon, H. (1993). *Protocol analysis. Verbal report as data.* Cambridge: The MIT Press.

Euler, L. (1959). *Vollständige Anleitung zur Algebra.* Stuttgart: Reclam-Verlag.

Farkas, O. (2003). Lesen in der Fremdsprache: Ein Zusammenspiel unterschiedliche Performanzfaktoren. Eine empirische Untersuchung anhand von Protokollen Lauten Denkens. *Zeitschrift für angewandte Linguistik*, 39, 29–51.

Flick, U. (2008). *Qualitative Forschung. Ein Handbuch.* Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 6. edition.

Flick, U., von Kardorff, E., Keupp, H., & Wolff, S., Eds. (1995). *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen. 2. Auflage.* Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1&2.* Stuttgart: Klett, 2. edition.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic: the learning process.* New York: D. Van Nostrand Company.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research an mathematical thinking: aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education*, V1, No. 3, 4–10.

Ginsburg, H. (1983). *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (2005). *Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung. 2. Auflage*. Bern: Huber.

Habermas, J. (1981). *Theorie des kommunikativen Handelns*, volume 1. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Harel, G. & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, II(I), 38–42.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 75–90.

Hasemann, K. (1986). *Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen*. Braunschweig: Vieweg.

Hasselhorn, M. (1998). Metakognition. In D. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (pp. 348–351). Weinheim: Beltz.

Hefendehl-Hebeker (2001a). *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt.*, chapter Die Wissensform des Formelwissens, (pp. 83–97). Hamburg: Kovac.

Hefendehl-Hebeker, L. (1999). Erleben, wie arithmetisches Wissen entsteht. In C. Selter & G. Walther (Eds.), *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann* (pp. 105–111). Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001b). Verständigung über Mathematik im Unterricht. In *Mathematik und Mensch. Sichtweisen der allgemeinen Mathematik*. Darmstadt: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Mathematik erleben. In *Mathematik-Didaktik*. Cornelsen-Scriptor.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamilia context. *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Rsychology of Mathematics Educational Studies in Mathematics*, 3, 145–152.

Hoffmann, M. (2005). Signs as Means for Discoveries: Peirce and His Concepts of "Diagrammatic Reasoning,Theorematic Deduction,Hypostatic Abstaction,änd "Theoretic Transformation". In Hoffmann, M.. and Lenhard, J.; Seeger, F. (Ed.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 45–56). Springer.

Hopf, C. (1995). Theodor W. Adorno, Else Frenkel-Brunswik, Daniel J. Levinson & R. Nevitt Sanford: Untersuchungen zur äutoritären Persönlichkeit". In U. Flick, E. von Kardorff, H. Keupp, & S. Wolff (Eds.), *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte , Methoden und Anwendungen* (pp. 123–1125). Weinheim: Beltz PVU, 2. edition.

Hughes, M. (1986). *Children and Number. Difficulties in Learning Mathematics.* Basil Blackwell. Oxford, UK.

Jahnke, H. N. (1995). Al-Khwarizmi und Cantor in der Lehrerbildung. In *Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule*, volume 21 (pp. 114–136). Köln: Aulis Verlag Deubner & CO KG.

Jahnke, H. N. (1999). *Geschichte der Analysis.* Heidelberg-Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kadunz, G. (2006). Schrift und Diagramm: Mittel beim Lernen von Mathematik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 27, H. 3/4, 220–239.

Kallmeyer, W. (1979). Kritische Momente. Zur Konversationsanalyse von Interaktionsstörungen. In W. Frier & G. Labroisse (Eds.), *Grundlagen der Textwissenschaft* (pp. 59–109). Amsterdam: Rodopi.

Kant, I. (1968). *Kritik der reinen Vernunft. Werkausgabe Band IV.* Suhrkamp: Frankfurt.

Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by Algerafying the K-12 Curriculum. In *The Nature and*

Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium Washington D.C.: National Acad. Press.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners'. In A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra. K-12* (pp. 91–96). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA; NJ: Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Kieran, C. (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. In A. Howson & J.-P. Kahane (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96–112). Cambridge University Press.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). NY: Macmillan Publisching Company, Maxwell Macmillan Canada.

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kopperschmidt, J. (1989). *Methodik der Argumentationsanalyse.* Stuttgart - Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog.

Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Krämer, S. (2008). *Medium, Bote, Übertragung: Kleine Metaphysik der Medialität.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Krummheuer, G. (1983). *Algebraische Termumformungen in der Sekundarstufe I. Abschlußbericht eines Forschungsprojektes. IDM Materialien und Studien Band 31.* Bielifeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtsmetodischen Dimension von Rahmungsprozessen. *JMD*, 5, 286–305.

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit Format.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(6), 247–256.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske+Budrich.

Krummheuer, G. & Voigt, J. (1991). Interaktionsanalysen von Mathematikunterricht. Ein Überblick über Bielefelder Arbeiten. In J. Maier, H. & Voigt (Ed.), *Interpretative Unterrichtsforschung: Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag*, volume 17 of *IDM-Reihe*. Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Lamnek, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch. 4., vollständig überarbeitete Auflage*. Weinheim und Basel: Beltz PVU.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and Teaching* (pp. 87–106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39–65.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerival Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

Mason, J. (1987). What Do Symbols Represent? In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 73–81). Hillsdale, New Jersey: Lauwrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2005). *Developing thinking in Algebra.* PCP: The Open University.

Merschmeyer-Brüwer (2002). Räumliche Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen - Augenbewegungen als Indikatoren für mentale Prozesse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 23(Heft 1), 28–50.

Müller, G., Steinbring, H., & Wittmann, E. (2004). *Arithmetik als Prozess.* Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Mormann, T. (1981). *Argumentieren, begründen, verallgemeinern: zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Königstein/Ts.: Scriptor.

Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen.* Hildesheim: Franzbecker: Hildesheim.

Oswald, H. (2003). Was heißt qualitativ forschen? Eine Einführung in Zugänge und Verfahren. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Eds.), *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft.* Juventa.

Papadopoulos, D. (1999). *Lew S. Wygotski - Werk und Wirkung.* Frankfurt am Main: Campus Verlag.

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and Teaching* (pp. 107–111). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2001). The Historical Origins of Algebraic Thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13–36). Kluwe Academic Publishers.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuos, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 145–164.

Rüede, C. (2009). Wenn das unangesprochene regelnd wirkt - eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30, H. 2, 93–120.

Rogers, C. R. (1976). *Entwicklung der Persönlichkeit.* Stuttgart: Klett.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 55–62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Roth, G. (2003). *Fühlen, Denken, Handeln. Wie das Gehirn unser Verhalten steuert.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern.* Franzbecker: Hildesheim.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung.* Heidelberg: Edition Schindele.

Schoen, H. (1979). Using the Individual Interview to Assess Mathematics Learning. *Arithmetic Teacher*, 27(3), 34–37.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). NY: Macmillan Publisching Company, Maxwell Macmillan Canada.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Franzbecker: Hildesheim.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *JMD*, 24, Heft 3/4, 211–235.

Seeger, F. (2005). Notes on a Semiotically Inspired Theory of Teaching and Learning. In Hoffmann, M.. and Lenhard, J.; Seeger, F. (Ed.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 67–76). Springer.

Serra, M. (2003). *Discovering Geometry. An Investigative Approach.* Key Curriculum Press.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 191–200.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification - The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Sjuts, J. (2001). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. *Mathematik-Unterricht*, 1, 61–68.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24, H. 1, 18–40.

Stein, M. (1986). *Beweisen.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker: Hildesheim.

Steinbring, H. (2000a). *Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). Abschlußbericht zu einem DFG-Projekt.* Dortmund: Universität Dortmund.

Steinbring, H. (2000b). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21, H. 1, 28–49.

Steinbring, H. (2001). Der Sache mathematisch auf den Grund gehen - heißt Begriffe bilden. In C. Selter & G. Walther (Eds.), *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller* (pp. 174–183). Leipzig; Stuugart; Düsseldorf: Klett-Grundschulverlag.

Steinbring, H. (2005a). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* New York: Springer.

Steinbring, H. (2005b). Do Mathematical Symbols Serve to Describe or Construct "Reality"? - Epistemological Problems in Teaching Mathematics in the Field of Elementary Algebra. In Hoffmann, M.. and Lenhard, J.; Seeger, F. (Ed.), *Activity and Sign: grounding mathematics education* (pp. 91–104). Springer.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des Mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Lengerich: Pabst Science Publishers.

Stern, E. (2001). Intelligenz, Wissen, Transfer und der Umgang mit Zeichensystemen. In E. Stern & J. Guthke (Eds.), *Perspektiven der Inteligenzforschung* (pp. 163–203). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Stjernfelt, F. (2000). Diagramms as Centerpiece of a Peircean Epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 36(3), 357–384.

Toulmin, S. (1975). *Der Gebrauch von Argumenten.* Scriptor-Verl.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten. 2. Auflage.* Weinheim: Beltz Athenäum.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 8–19). National Council of Teachers of Mathematics.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Weinheim: Beltz.

Voigt, J. (1991). Die mikroethnographische Erkundung von Mathematikunterricht - Interpretative Methoden der Interaktionsanalyse. In H. Maier & J. Voigt (Eds.), *Interpretative Unterrichtsvorschung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (pp. 152–175). Köln: Aulis Verlag Deubner & CO KG.

Voigt, J. (2003). Unterrichtsbeobachtung. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Eds.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft.* Weinheim und München: Juventa Verlag.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe.* München: Spektrum.

von Kardorff, E. (1995). Qualitative Sozialforschung - Versuch einer Standortvestimmung. In U. Flick, E. von Kardorff, H. Keupp, & S. Wolff (Eds.), *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen.* Weinheim: Beltz PVU, 2. auflage edition.

Wittgenstein, L. (2004). *Philosophische Untersuchungen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittmann, E. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern.* Braunschweig: Vieweg.

Wohlrapp, H. (2008). *Der Begriff des Arguments.* Würzburg: Verlag Königshausen&Neumann.

Wygotski, L. S. (1926). *Pedagogicheskaja psichologia.* Moskau: Pedagogika.

Wygotski, L. S. (1931). Pädologie des frühen Jugendalters. In *Ausgewählte Schriften. Bd. 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persänlichkeit* (pp. 307–658). Köln: Pahl-Rugenstein, 1987.

Wygotski, L. S. (1934a). *Denken und Sprechen.* Berlin: Akademie-Verlag, 1964.

Wygotski, L. S. (1934b). Unterricht und geistige Entwicklung im Schulalter. In *Ausgewählte Schriften. Bd. 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persänlichkeit* (pp. 287–306). Köln: Pahl-Rugenstein, 1987.

Zimmermann, B. (1977). *Analyse des Problemlöseverhaltens bei Aufgaben aus der Inzidenzgeometrie. Eine exploratorische Studie mit Studenten ind Schülern.* Gesamthochschule Paderborn.

Zimmermann, B. (1982). Denkprozesse beim Lösen mathematischer Deduktionsaufgaben - Bericht über eine exploratorische Untersuchung. *JMD*, 3/4, 175–206.

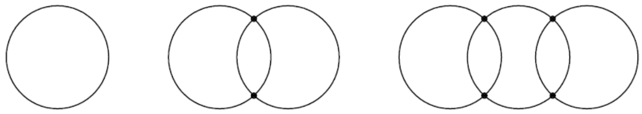
Anhang A

Aufgaben der Unterrichtsaktivitäten

Auf den folgenden Seiten werden die Aufgaben der Unterrichtsaktivitäten präsentiert. Die Abbildungen stellen genau die Aufgabenblätter dar, die die Schüler vorgelegt bekommen haben. Die russischen Schüler haben entsprechend eine Version der Aufgaben in der russischen Sprache erhalten.

Die Orignialfarben in einigen Aufgabenstellungen wurden aufgrund des schwarzweißen Druckens durch kontrastierende Grautöne ersetzt.

Aufgabe 1

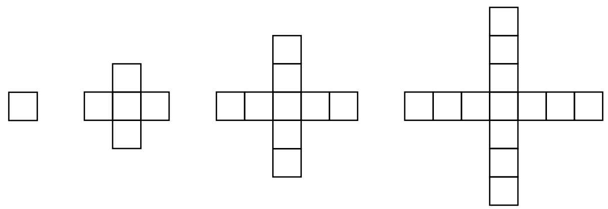


- Setzte die Figurenfolge um zwei fort.
- Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte der Ringe und trage diese in die Tabelle ein.
- Finde eine Gesetzmäßigkeit und beschreibe sie mit eigenen Worten.

Figurennummer	Anzahl der Schnittpunkte
1	
2	
3	
4	
5	

Abbildung A.1: Aufgabe RINGE

Aufgabe 2

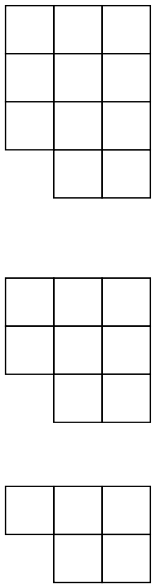


- Betrachte die Figurenfolge.
- Fülle die Tabelle für die ersten sechs Figuren aus.
- Finde und beschreibe die Gesetzmäßigkeit mit deinen eigenen Worten.
- Suche einen Term für die Anzahl der Kästchen in der *n*-ten Figur.
- Bestimme die Anzahl der Kästchen in der 10. und 101. Figur.

Nr. der Figur	1	2	3	4	5	6	…	n	…	10	…	101
Anzahl der Kästchen												

Abbildung A.2: Aufgabe KREUZE

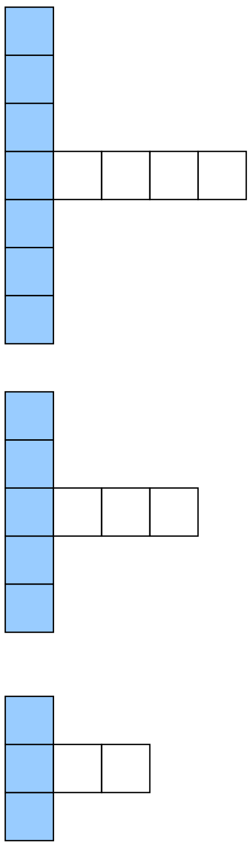
Aufgabe 3



Nummer der Figur	1	2	3	4	5	6	…	n	…	30	…	101
Anzahl von Teilen												

Abbildung A.3: Aufgabe OHNE ECKE

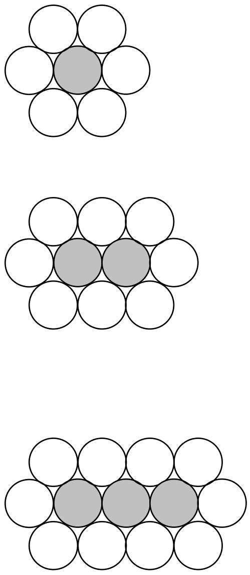
Aufgabe 4



Muster- Nr.	1	2	3	4	5	6	…	n	…	25	…	50
Anzahl von gelben Quadraten												
Anzahl von blauen Quadraten												
Gesamtzahl von Quadraten												

Abbildung A.4: Aufgabe T

Aufgabe 5

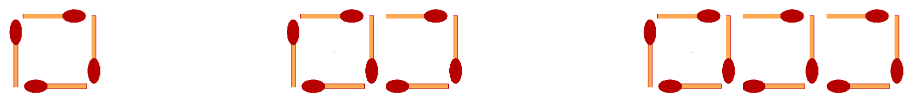


Nr.	Anzahl von gelben Kreisen	Anzahl von weißen Kreisen	Anzahl insgesamt
1			
2			
3			
4			
5			
…			
n			
…			
10			
…			
70			

Abbildung A.5: Aufgabe BLUMEN

Aufgabe 6

Anzahl Kettenglieder:	1	2	3



Anzahl Zündhölzer:	4	7	10

Wenn du mit Zündhölzern Ketten legst, entdeckst du Gesetzmäßigkeiten. Zwischen der Anzahl der Kettenglieder und der Anzahl benötigter Zündhölzer besteht eine Beziehung. Für eine beliebig lange Kette kann diese Beziehung als Term geschrieben werden.

Zu dieser Kette wurden zwei Terme gefunden:
Anja schrieb $3 \cdot n + 1$ und Peter schrieb $4 + 3 \cdot (n - 1)$.

Wie haben Anja und Peter gerechnet? Wer hat Recht?

Abbildung A.6: Aufgabe ZÜNDHOLZKETTE

Anhang B

Transkripte

Tabelle B.1: KREISE - Kevin

I – Interviewerin; K – Kevin		
1	I	Erzähl mal, was du da auf dem Blatt siehst.
2	K	Ja, also ich seh verschiedene Figuren und, also das hier ist dann Figur 1, das ist Figur 2 und das ist Figur 3 *(schreibt die entsprechende Nummer über die Figuren)*, das steht dann ja auch an der Tabelle und da soll ich jetzt die Gelben zählen, die Blauen zählen und dann, äh, insgesamt, also die gelben.
3	I	Und eine Gesetzmäßigkeit irgendwie herausfinden dann, ja?
4	K	Ja, genau. Eine Gesetzmäßigkeit, also dann mit n und mit der Gesetzmäßigkeit dann die beiden hier *(zeigt auf die letzten beiden Spalten)* ausrechnen.
5	I	Okay. Dann probier das bitte, indem du erst mal nur mit den Gelben arbeitest.
6	K	Mit den Gelben? Okay. Also die erste Figur hat einen gelben *(schreibt die Zahl 1 in die Tabelle)*. Die zweite zwei, die dritte drei, ja und dann die vierte vier *(schreibt dabei in die Tabelle)*, also ist die Formel n, n mal eins.
7	I	Ja.
8	K	*(schreibt $n \cdot 1$ in die n-Spalte)* So, und dann hat die siebte natürlich sieben und die fünfzigste fünfzig *(schreibt dabei in die Tabelle)*
9	I	Ja.
10	K	Dann die Anzahl der Blauen, da haben wir in der ersten vier
11	I	Zeig mir bitte, welche vier du meinst.
12	K	Eins, zwei, drei, vier *(zeigt mit dem Stift auf die vier blauen Kreise, fängt beim untersten an und tippt im Uhrzeigersinn auf die anderen mit dem Stift)*.
13	I	Okay.
14	K	Bei der zweiten haben wir eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs *(zählt die Kreise mit dem Stift ab)* und da haben wir sechs, sieben, acht *(zeigt bei der dritten Figur auf die blauen Kreise; schreibt 8 in die Tabelle)*
15	I	Zeig mir bitte diese acht.
16	K	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht *(zeigt auf die Kreise, fängt beim Kreis unten links an und geht gegen den Uhrzeigersinn vor)*.
17	I	Okay.
18	K	So (..) dann haben wir bei der vierten zehn, weil das sind immer zwei mehr.
19	I	Mmh.
20	K	Von Figur zu Figur. *(schreibt 10 in die Tabelle)*

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.1 – KREISE - Kevin – Fortsetzung

21	I	Und welche zwei meinst du dann? Welche zwei kommen dazu?
22	K	Ja, immer zwei blaue Kreise mehr.
23	I	Kannst du diese mehr zeigen? Von Figur 2 zu Figur 3?
24	K	Also, da sind dann sechs *(zeigt auf Figur 2)* und da kommen dann da *(zeigt auf Figur 3, flüstert)* (..)
25	I	Ganz ruhig, also wir haben Zeit.
26	K	Ja, da kommen zwei dazu *(zeigt auf den Kreis links oben und den links unten in Figur 3)* die beiden, oder auch vielleicht die beiden *(zeigt auf die mittleren Kreise, jeweils einer oben, einer unten)*. Ist ja eigentlich egal.
27	I	Aha, also mit jedem Gelben.
28	K	Mmh.
29	I	Ja, hab verstanden.
30	K	Und die Gesetzmäßigkeit ist n mal zwei plus zwei *(schreibt $n \cdot 2 + 2$ in die n-Spalte)*. Und wenn man das dann damit ausrechnet, also sieben mal zwei sind vierzehn, plus zwei sind dann sechzehn. Und dann *(schaut in die 50-Spalte)* sind dann hundert, sind dann hundertzwei. Und jetzt brauch ich die ja hier nur noch *(zeigt immer in einer Zeile auf die erste und die zweite Spalte)* zusammenrechnen.
31	I	Nene, erst mal wird erklärt, n mal zwei plus zwei. Kannst du mir das bitte erklären? Mit der Figur 3 sagen wir so.
32	K	Bei der Figur 3. Also, wenn ich jetzt hier die blauen Kreise noch nicht wüsste und die rauskriegen möchte, dann rechne ich die drei, also das n steht ja für jede beliebige Anzahl der Figur, dann ist die 3 das n und zwei mal die drei sind dann sechs und plus zwei sind dann acht und dann hat man die Anzahl der blauen Kreise.
33	I	Okay. Gut.
34	K	Und wenn ich jetzt, jetzt ist ja nach den Gesamtkreisen gefragt und da brauch ich die ja eigentlich alle nur zu addieren. Und die Formel rausfinden kann ich dann ja nachher machen.
35	I	Mmh, mach das.
36	K	*(Schreibt nacheinander die Gesamtanzahl der Kreise in die Spalten 1 bis 4 sowie 7 und 50, lässt dabei die n-Spalte aus)*. So, dafür *(sieht auf die n-Spalte)* die Formel ist dann jetzt *(8 Sek. Pause)* n mal, n mal drei plus zwei. Also, jetzt kann man die Formel, die kann man ja auch sozusagen addieren. Also zwei plus eins und die zwei bleibt dann einfach stehen; n mal drei plus zwei *(schreibt $n \cdot 3 + 2$ in die Tabelle)* Das kann man dann jetzt hier mal mit der dritten machen. Wenn man dann, drei mal drei sind neun, plus zwei sind dann elf.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.1 – KREISE - Kevin – Fortsetzung

37	I	Aha. Geschickt, klasse.
38	K	Ja, das haben wir auch schon ziemlich oft so in der Schule gemacht, so ähnliche Arbeitsblätter.
39	I	Ja, so ähnliche Arbeitsblätter, deshalb wollte ich
40	K	Mmh, die sind ja auch alle von der Uni, ne?
41	I	Ja.
42	K	Die haben wir auch alle bekommen.
43	I	Waren die alle schwer oder ging es so?
44	K	Ja, also manche waren schon etwas kniffelig, aber ging eigentlich, es war ja dasselbe Prinzip.

Tabelle B.2: KREISE - Laura

I – Interviewerin; L – Laura		
1	L	Erstmal ist hier ne Tabelle und dann steht Anzahl der gelben Kreise, das sind die hier *(zeigt auf den gelben Kreis der ersten abgebildeten Figur).*
2	I	Ja
3	L	Und dann ist da die Anzahl der blauen Kreise; das sind diese hier *(umkreist mit ihrem Stift die blauen Kreise der zweiten abgebildeten Figur).*
4	I	Ja
5	L	Und dann Anzahl der insgesamt Kreise.
6	I	Okay
7	L	Das ist dann alles zusammen und das sind die Figurennummern, die kann ich drüber schreiben *(nummeriert die abgebildeten Figuren mit 1, 2 und 3 durch).*
8	I	Okay, dann fangen wir an: gelbe Kreise.
9	L	Okay, bei der ersten Figur ist ein gelber Kreis, bei der zweiten Figur sind zwei gelbe Kreise, bei der dritten Figur sind drei gelbe Kreise und bei der vierten müssten dann vier gelbe Kreise sein, weil immer einer dazu kommt *(schreibt dabei die Zahlen in die Tabelle).*
10	I	Okay.
11	L	Okay, dann bei 7 müssten es sieben Kreise sein und bei 50 auch fünfzig *(schreibt die Zahlen in die Tabelle)*
12	I	Ja.
13	L	Okay, dann
14	I	Was ist mit n?
15	L	Das müsste dann, n ist das, dann n plus Null. Ja *(schreibt $n+0$ in die Tabelle).*
16	I	Mmh, und warum?
17	L	Weil bei der ersten Figur ist nur ein gelber Kreis und bei der zweiten sind es zwei, also n plus Null sozusagen. Das ist immer das gleiche wie da oben steht *(zeigt auf die Figurennummer)*
18	I	Mmh.
19	L	Dann die Anzahl der blauen Kreise, bei der ersten Figur sind das vier, bei der zweiten Figur sind das sechs.
20	I	Mmh, kannst du mir diese sechs zeigen?
21	L	Hier, eins, zwei, drei, vier, fünf und sechs *(zählt bei Figur 2 die blauen Kreise rundum ab)*
22	I	Okay.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.2 – KREISE - Laura – Fortsetzung

23	L	Und dann bei der dritten sind das *(zählt einzeln zunächst die oberen drei, dann die unteren drei und schließlich die beiden Kreise an den Enden ab)* acht.
24	I	Mmh.
25	L	Und dann müssten es bei der vierten (..) zehn sein. Ja, dann müssten es zehn sein, weil wenn man jetzt von da (zeigt auf die Zahlenfolge entlang der gerade ausgefüllten Zeile) losgeht, dann kommen immer zwei dazu *(schreibt 10 in die Tabelle)* und bei 7 *(4 Sek. Pause)* da müsste ich jetzt ne Formel finden, damit ich die anderen beiden rauskriege.
26	I	Ja.
27	L	Mmm *(10 Sek. Pause)*
28	I	Was überlegst du gerade?
29	L	Wie ich das rauskriegen könnte (..) und zum Beispiel, ich weiß noch nicht, ich bin noch nicht ganz fertig.
30	I	Aber sag einfach, was du jetzt denkst.
31	L	Ich überlege vielleicht mit n mal, da gucke ich gerade mal, das könnte n mal zwei sein, oder, es könnte n mal zwei plus zwei sein, ja. Das müsste eigentlich gehen, weil n mal zwei, das sind *(zeigt dabei auf die Spalte von Figur 1)* zwei plus zwei sind vier, und dann hier *(zeigt auf die zweite Spalte)* n mal zwei, sind zwei mal zwei sind vier, plus zwei sind sechs.
32	I	Mmh.
33	L	Und das geht bei allen, hier auch *(zeigt auf die dritte und die vierte Spalte)*. Zwei mal drei sind sechs, plus zwei sind acht und zwei mal vier sind acht, plus zwei sind zehn; dann muss das n mal zwei plus zwei *(schreibt* $n \cdot 2 + 2$ *in die Tabelle)*, dann müssten das hier vierzehn, sechzehn sein *(schreibt 16 in die 7er Spalte)*, bei 50 müssten das hundert, hundertzwei *(schreibt 102 in die 50er Spalte)*
34	I	Mmh, okay.
35	L	Und Anzahl der Gesamtkreise, das sind im ersten *(zählt die Kreise der ersten Figur ab)* fünf, im zweiten sind das acht *(schreibt dabei die Zahlen in die Tabelle)*.
36	I	Mmh, wie hast du acht herausgefunden?
37	L	Mmm, da hab ich jetzt einfach hier *(zeigt auf die Spalte mit den Einträgen 2 und 6)* zusammengezählt, weil das ja hier schon steht. Und das sind dann acht.
38	I	Ja.
39	L	Elf, vierzehn, hier sind es dann (..) einundzwanzig, oder warte *(6 Sek. Pause)*
40	I	Sieben und sechzehn (..)

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.2 – KREISE - Laura – Fortsetzung

41	L	Dreiundzwanzig *(trägt die Zahl 23 in die 7er Spalte ein)* und hier sind das hundertzweiundfünfzig *(schreibt 152 in die 50er Spalte)*. Jetzt muss ich die Formel rauskriegen, dass ich das rechnen kann. *(34 Sek. Pause)* Das müsste dann n mal drei plus zwei, oder? Ja.
42	I	Mmh. Schreib erst mal deine Formel auf.
43	L	Weil ähm (..) Okay *(schreibt* $n \cdot 3 + 2$ *auf)*
44	I	Und jetzt erzähl mal.
45	L	Erstmal hier *(hält während ihrer Ausführungen den Daumen der linken Hand auf der Figurennummer in der 1er Spalte*) einmal drei sind drei, plus zwei sind fünf *(zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf den Eintrag 5 in der 1er Spalte)*. Zwei mal drei *(hält den Zeigefinger der linken Hand an die Figurennummer der 2er Spalte)* sind sechs *(zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf den Eintrag 6 in der 2er Spalte)*, plus zwei sind acht *(zeigt dabei auf die 8 in der 2er Spalte)*. Dann, ähm, *(zeigt auf die dritte Spalte)* n mal, also drei mal drei sind neun, plus zwei sind elf, und vier mal drei sind zwölf, plus zwei sind vierzehn.
46	I	Aber wie bist du auf die Idee gekommen, n mal drei zu nehmen? Das wäre interessant, das ist richtig, ja.
47	L	Ja *(zeigt mit dem Stift in der rechten Hand auf die Figurennummer 4 in der 4er Spalte)*, ich hab mir die 4 angeguckt und dann und dann hab ich mir ein bisschen überlegt, wie ich mit mal in die Nähe von vierzehn komme. Da hab ich mir überlegt vierzehn geht nicht und dann bin ich auf die zwölf gekommen und das ist dann drei mal vier, und das sind dann zwölf und dann noch mal plus zwei und dann hat man das Ergebnis und dann hab ich's dann einfach bei allen ausprobiert.
48	I	Überprüft, ob das so geht.
49	L	Ja.
50	I	Aha, okay, einverstanden. Mmh,(...) gut. Also, du hast hier drei, fünf, acht und vierzehn angeguckt. Schön. Aber falls ich das richtig verstanden hatte, du hast hier fünf rausgefunden, *(zeigt auf die erste Spalte)* indem du eins und vier addiert hast. Acht war die Summe von zwei und sechs, ja? Und dreiundzwanzig, bei 7, hast du auch durch Addition von sieben und sechzehn herausgefunden, stimmts?
51	L	Ja, ich hab das, ähm, gemacht, weil zuerst hab ich das einfach mal zusammengezählt *(tippt abwechselnd mit dem Zeige- und Mittelfinger auf die Einträge 7 und 16 in der 7er Spalte)*, weil es kommt dann ja raus, weil es gelb *(zeigt auf die Zahl 7)* und blau *(zeigt auf die Zahl 16)* sind.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.2 – KREISE - Laura – Fortsetzung

52	I	Natürlich, die Zahlen standen da, also das ist das einfachste, okay. Wie wäre es dann mit n? Weil bei n hast du schon zwei Terme stehen: n plus Null und n mal zwei plus zwei.
53	L	Mmh, soll ich da, soll ich die jetzt irgendwie zusammenfügen oder?
54	I	Ja, das ist die Frage. Kann man das?
55	L	Mmm, wenn man die zusammensetzt, dann kommt da nicht das da *(zeigt auf ihre Formel für die Gesamtanzahl)* raus, sondern das ist eine andere.
56	I	Schreib da unten bitte auf, was dann da rauskommt, wenn du es so machst.
57	L	Dann, wenn ich das in einem Term mache, dann würde ich das so machen (schreibt $2 \cdot n$) (...) nee, nee das geht nicht *(streicht wieder durch)* mal überlegen, ähm (..)
58	I	Hast du verstanden, was ich meine?
59	L	Ja.
60	I	Dann wiederhol mal.
61	L	Ja, ich soll versuchen, die *(zeigt auf die Terme $n + 0$ und $n \cdot 2 + 2$)* zusammenzufügen und dann gucken, was da raus kommt.
62	I	Ja, richtig.
63	L	*(Schreibt $2 \cdot n + (2 + 0)$)*
64	I	Mmh, was ist das?
65	L	Das sind zwei mal n das
66	I	Was ist das denn, zwei mal n?
67	L	Das (..), soll ich das mit einer Zahl ausprobieren, einfach mal gucken?
68	I	Mmh.
69	L	Ja, dann zwei mal eins, sind ähm, zwei halt und die muss ich dann sozusagen noch plus die da *(zeigt auf die Klammer in ihrem Term)* machen, aber erst mal muss ich die Klammer ausrechnen.
70	I	Das sieht gut aus, aber ich hab ehrlich gesagt deinen Term nicht verstanden. Erklär es uns bitte, es mag richtig sein, aber ich verstehe nicht, wofür das steht. Was ist zwei mal n und plus Klammer auf zwei plus Null. Erklär uns das bitte.
71	L	Ja, also zwei mal n, das ist ja sozusagen die Grundlage, dass man die Anzahl der blauen Kreise rauskriegt und ähm dann muss man ja eigentlich noch
72	I	Was meinst du damit?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.2 – KREISE - Laura – Fortsetzung

73	L	Ja, dass man die blauen Kreise erst mal rauskriegt und dann in Klammern plus zwei, das gehört nämlich auch noch zu diesem hier *(zeigt auf den Term $n \cdot 2 + 2$ für die blauen Kreise)* und dann muss man versuchen, die Anzahl der gelben Kreise rauszukriegen. Und dann müsste man die einfach noch dazu, hab ich so überlegt (..)
74	I	Kannst du vielleicht mit Farben so markieren, was zu den blauen Kreisen gehört? *(gibt L einen roten und einen grünen Stift)*
75	L	Also, dann nehme ich jetzt mal grün. Das hier *(zeigt auf ihren Term unter der Tabelle und setzt über und unter die Zahl 2 in der Klammer sowie die 2 vor dem Malzeichen und dem n jeweils einen grünen Strich).* Soll ich auch das Malzeichen
76	I	Aha, okay.
77	L	*(Setzt über und unter das Malzeichen je einen grünen Strich)* und zur Hälfte auch das *(unterstreicht das n mit grün)*, aber das gehört dann eigentlich auch zu dem anderen *(setzt über das n einen roten Strich; dann zwei rote Striche um das Pluszeichen und um die Zahl 0).* Okay, jetzt hatte ich überlegt, die so zu verbinden.
78	I	Wow, okay. Und das ist die Summe von n plus Null und n mal zwei plus zwei?
79	L	Ja, aber eigentlich kommt dann das Gleiche wie bei der Anzahl der blauen Kreise raus, weil hier ist es n plus Null.
80	I	Alles klar. Okay, vielen Dank.

Tabelle B.3: KREISE - Michael

I – Interviewerin; M – Michael		
1	I	Also, erstmal gelbe Kreise.
2	M	Ja, da mach ich jetzt mal *(schreibt 1 in die erste Spalte; schreibt dann 2, 3, 4 in die entsprechenden Kästchen)*. Das *(zeigt auf die n-Spalte)* lass ich erstmal *(schreibt 7 und 50 in die entsprechenden Spalten)* So.
3	I	Mmh, und was würde dann bei n stehen?
4	M	Bei n, äh, (...) nachdenken.
5	I	Ja, klar, also natürlich nachdenken. Dann gucken wir in aller Ruhe bei Figur 1, wie viele gelbe Kreise siehst du da?
6	M	Einen.
7	I	Bei Figur 2?
8	M	Zwei und dann drei, dann kann man eigentlich n plus 1 nehmen.
9	I	Bei Figur 7?
10	M	Da sind auch sieben.
11	I	50?
12	M	Da sind auch fünfzig.
13	I	n?
14	M	Ist dann *(5 Sek. Pause)*
15	I	Was denkst du?
16	M	Mmm (..)
17	I	Was ist eigentlich n?
18	M	n für (..) ja *(6 Sek. Pause)*
19	I	Guck mal, da steht auch Figurennummer.
20	M	Ja, dann ist n vielleicht, ach, wie kann man das erklären?
21	I	Erklär wie du möchtest, mit deinen eigenen Worten.
22	M	Also, sämtliche Zahlen, dann was dazu rechnen. Also, das soll jetzt ungefähr heißen das n, also das n ist jetzt irgendeine Zahl, zum Beispiel 4 und dann rechnet man da irgendwas zu.
23	I	Ja, zum Beispiel 4, n kann 4 sein, das ist richtig. Und bei Figur 4, wie viele gelbe Kreise haben wir denn?
24	M	Vier.
25	I	Mmh.
26	M	Ja (.) da rechnet man eigentlich n plus Null. Weil dann hat man ja die 4, das ist ja Figur 4 und dann auch vier gelbe Kreise, dann rechnet man bei der Figur 4 eigentlich gar nicht mehr dazu.
27	I	Mmh, und bei der Figur 3?
28	M	Ist genau das gleiche.
29	I	Und 7?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

30	M	Auch.
31	I	Auch, also was würde bei n stehen?
32	M	n plus Null
33	I	Ja, schreib das auf.
34	M	*(schreibt $n + 0$ auf)*
35	I	Und wieso hast du jetzt plus Null geschrieben?
36	M	Weil die Zahl, jetzt 4, da rechnet, da sind ja gar keine anderen Zahlen dazu gezählt.
37	I	Aha, also deswegen plus Null.
38	M	Das ist genau das Gleiche.
39	I	Okay, gut. Jetzt blaue Kreise.
40	M	Ja, das sind erst vier, dann sind sechs, dann sind da acht *(schreibt nacheinander die Zahlen in die Tabelle)*.
41	I	Welche acht? Kannst du mir das bitte zeigen?
42	M	Eins, zwei, drei, vier *(zählt die blauen Kreise einzeln ab)* also drei *(zeigt die obere Dreierreihe entlang)* plus drei *(zeigt auf die untere Dreierreihe)* sind sechs und zwei dazu *(zeigt auf die beiden Kreise an den Seiten)* sind acht.
43	I	Mmh, okay.
44	M	Bei der 4 sind dann zehn *(schreibt 10 auf)*.
45	I	Wie hast du die zehn ausgerechnet?
46	M	Also, das ist hier immer plus zwei *(zeigt auf die Zahlenreihe)*. Bei der ersten sind vier, und dann sechs und dann acht.
47	I	Aha, okay.
48	M	Dann sind das hier *(zeigt auf die 7er Spalte) (6 Sek. Pause)* mein ich mal, dass das dann sechzehn sind *(schreibt 16 auf)*.
49	I	Warum?
50	M	Wenn man sich das dann im Kopf mal so denkt, bei der 5 sind dann zwölf, bei der 6 sind dann vierzehn und bei der 7 sind es dann sechzehn.
51	I	Okay, du hast immer plus zwei dazu gerechnet. Mmh.
52	M	Und bei der 50 *(7 Sek. Pause)*
53	I	Du kannst schreiben, wenn du möchtest.
54	M	Ja, mach ich lieber immer im Kopf.
55	I	Ja? Kannst du das vielleicht laut machen, was du da ausrechnest?
56	M	Ja, ich versuch jetzt gerade herauszufinden, was die 50 sind.
57	I	Ja.
58	M	Vielleicht könnte man ja (..) dreiundvierzig mal zwei rechnen.(..) Weil da fehlen jetzt dreiundvierzig *(zeigt zwischen der 7er und der 50er Spalte hin und her)* und dann immer plus zwei.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

59	I	Äh, was ist dreiundvierzig?
60	M	Dreiundvierzig?
61	I	Ja(...), wie kommst du auf dreiundvierzig?
62	M	Zwischen sieben und fünfzig *(zeigt auf die beiden Figurennummern)* fehlen dreiundvierzig.
63	I	Aha. Also, du rechnest fünfzig minus sieben?
64	M	Ja, dann hab ich erstmal dreiundvierzig raus und dann kann man ja zum Beispiel vielleicht rechnen dreiundvierzig mal zwei.
65	I	Schreib das auf. Du kannst z. B. hier *(zeigt unterhalb der Tabelle)* deine Rechnung schreiben.
66	M	*(schreibt unterhalb der Tabelle)* Dreiundvierzig mal zwei *(flüstert, rechnet)* gleich, sind dann sechsundachtzig (..) mein ich zumindest.
67	I	Ja, mmh.
68	M	*(schreibt* $= 86$*)* Dann müsste bei der 50, sechsundachtzig eigentlich rauskommen.(..) Ja, mein ich jetzt mal so *(schreibt 86 in die 50er Spalte)*.
69	I	Mmh, und kannst du nochmal die Rechnung aufschreiben, wie du auf dreiundvierzig gekommen bist?
70	M	Ja, *(schreibt* $50 - 7 = 43$*;* $43 \cdot 2 = 86$*)*
71	I	Dreiundvierzig, mmh. Und weiter?
72	M	Bei n kann man dann zum Beispiel rechnen (..), oh wie soll man das denn machen? *(6 Sek. Pause)*
73	I	Ja, hier wäre es schön, wenn du jetzt eine allgemeine Regel formulieren könntest, mit n.
74	M	Ja. (...) also hier *(zeigt auf die erste Spalte, die erste und zweite Zeile)* ging das ja plus drei, aber dann muss man hier *(zeigt auf die zweite Spalte)* plus vier rechnen und hier *(zeigt auf die dritte Spalte)* plus fünf.
75	I	Moment, was machst du gerade?
76	M	Also, ich rechne gerade, also versuch ich zumindest, dass man bei allen Zahlen irgendeine *(5 Sek. Pause)* eine Zahl, die man auf das n rechnen kann, dass dann das bestimmte immer rauskommt.
77	I	Achso, dann probier einmal aus, ja?
78	M	Ja, also (..) n plus drei, n plus zwei plus vier, das geht eigentlich überhaupt nicht, aber n plus zwei und sechs, das geht nur hier *(zeigt auf die 4er Spalte) (4 Sek. Pause)* Mmm *(21 Sek. Pause)*.
79	I	Können diese Bilder vielleicht ein wenig helfen, weil du hast da gerade
80	M	Mmh, jetzt habe ich es gerade rausgekriegt.
81	I	Ja? Was denn?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

82	M	Man könnte rechnen n mal zwei plus zwei. Weil bei der ersten, wenn man da zwei plus zwei rechnet, einmal zwei sind ja zwei, dann hat man da zwei raus, und dann plus zwei sind vier, und das geht hier auch, hat man hier auch vier, und plus zwei sind dann sechs und da? *(zeigt auf die 3er Spalte)* hab ich gar nicht geguckt, sind sechs, ja das geht wieder auch.
83	I	Aha, scheint zu funktionieren, schreib das bitte auf, was du gesagt hast.
84	M	So, n mal zwei plus zwei (schreibt $n \cdot 2 + 2$).
85	I	Mmh (..), klappt das auch bei 7, wenn wir das so rechnen? Probier es mal aus.
86	M	Ja, sieben mal zwei sind vierzehn, plus zwei sind sechzehn. (..) bei der 50 kann man ja rechnen, fünfzig (..) ah, das ist falsch *(zeigt auf die 86)*, weil fünfzig mal zwei sind hundert, plus zwei sind dann hundertzwei, dann müsste da eigentlich hundertzwei rauskommen.
87	I	Ja.
88	M	Bei der 50.
89	I	Also, eine von beiden Zahlen ist definitiv richtig und eine ist definitiv falsch.
90	M	Ja.
91	I	Ja, wie würdest du dich entscheiden?
92	M	Ich würde mich eigentlich eher auf die hundertzwei, für die hundertzwei entscheiden, weil vor der 50, also überall klappt das bisher mit der n mal zwei plus zwei. Und wenn man das bei der 50 dann auch macht, kommt da hundertzwei raus. Und dann würd ich sagen, das wird eigentlich hundertzwei werden, ja.
93	I	Ja, dann durchstreichen und hundertzwei schreiben. Und wo liegt unser Fehler eigentlich mit sechsundachtzig? Was meinst du?
94	M	*(Streicht die 86 durch und schreibt 102 drüber)* Ja, ich hab das vorher so gerechnet, mit der dreiundvierzig mal zwei, aber irgendwie kann das eigentlich auch nicht klappen, also weiß ich selbst nicht. (...) Vielleicht ist das falsch, weil ich die dreiundvierzig mal zwei gerechnet habe, und das ist insofern falsch, weil wenn man jetzt, bei der 7 hab ich zum Beispiel auch nicht jetzt drei mal zwei gerechnet, weil da käme dann jetzt, drei mal zwei das sind ja sechs, also wäre das dann auch insofern falsch.
95	I	Mmh, also ganz falsch ist das nicht. Also, ich finde deine Methode interessant. Du hast erst den Abstand zwischen 7 und 50 ausgerechnet mal zwei, und das ist also sechsundachtzig, aber vor 7 stehen auch Zahlen, du bist ab der Zahl 7 weitergegangen.
96	M	Ja, dazwischen *(zeigt auf die 7 und die 50)* sind ja auch noch Zahlen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

97	I	Dazwischen hast du alles ausgerechnet, aber vor 7, das hast du vergessen.
98	M	Ja, vor 7 (..)
99	I	Also, von 1 bis 7.
100	M	Ja, bei der 5 ist dann ja, wenn jetzt, fünfundvierzig mal zwei, das sind ja neunzig, und dann ist das ja auch irgendwie unlogisch, weil man jetzt mit dieser Methode rechnet *(zeigt auf das* $n \cdot 2 + 2$*)*, mit dem n mal zwei plus zwei.
101	I	Ja, das hat funktioniert, ja dann lassen wir das so stehen.
102	M	Ja.
103	I	Weiter.
104	M	Ja.
105	I	Wie heißt die letzte Zeile der Tabelle?
106	M	Ja, Anzahl der Kreise insgesamt. Muss man die *(zeigt jeweils auf die erste und die zweite Zeile)* einfach erstmal zusammenrechnen, fünf, acht, elf, vierzehn, (.) dreiundzwanzig, (..) und das wären dann hundertzweiundfünfzig *(trägt nacheinander die Zahlen in die letzte Zeile der Tabelle ein)*.
107	I	Mmh.
108	M	Ja.
109	I	Und bei n?
110	M	Bei n könnte man vielleicht rechnen (...) ja (...), wenn man jetzt diese fünf hat *(zeigt auf die 5 in der 1er Spalte)* und dann (..) ja wie soll man das sagen? Mmm *(24 Sek. Pause)* vielleicht könnte man das hier mit den Abständen machen. Weil von der fünf bis zur acht sind drei, von der acht bis zur elf sind auch drei, und von der elf bis zur vierzehn sind auch wieder drei.
111	I	Mmh.
112	M	Vielleicht könnte man dann rechnen (..) n plus (..) nee, jetzt hab ich es. Man kann von den Zahlen *(zeigt auf die zweite Zeile)* auch gut ausgehen. Weil hier ist plus eins, dann zwei, dann plus drei, dann plus vier (*zeigt jeweils in der 1er, 2er, 3er, 4er Spalte zunächst auf die Zahl in der zweiten dann auf die in der dritten Zeile)* ist auch irgendwie, das geht irgendwie. Dieses, die untere Zeile geht irgendwie mit der oberen Zeile, da wird immer plus eins, und da, wenn man die dann zusammenrechnet, gehts auch immer plus eins. Weil das sind dann plus fünf, ach, plus eins, plus zwei, plus drei und dann plus vier *(zeigt jeweils in der 1er, 2er, 3er, 4er Spalte zunächst auf die Zahl in der zweiten dann auf die in der dritten Zeile)*. Und hier ist das auch *(zeigt auf die 7er Spalte)*, das sind dann plus sechs.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

113	I	Sieben.
114	M	Nee, das ist dann plus sechs, hier kommt dann noch plus fünf *(zeigt neben die 4er Spalte)* häh? Das sind plus sieben. Plus fünf, plus sechs *(zeigt zwischen der 4er und der 7er Spalte)* und dann plus sieben (*zeigt auf die 7er Spalte*). Wenn man hier die ganzen Zahlen rechnet *(zeigt zwischen die 7er und die 50er Spalte)*, dann wird es nur schwer bis zur hundertzweiundfünfzig zu kommen.
115	I	Ja.
116	M	Hier sind es dann plus fünfzig *(zeigt auf 50er Spalte)*. Das ist dann auch irgendwie, das geht dann wie bei der oberen, wenn man die zusammenrechnet wie bei der oberen *(zeigt auf die erste Zeile)* immer plus eins.
117	I	Mmh. Ja.
118	M	Dann könnte man da eigentlich rechnen, *(5 Sek. Pause)* ja, was können wir da denn rechnen? *(4 Sek. Pause)* n plus *(26 Sek. Pause)* mmm.
119	I	Schwer, nicht?
120	M	Ja.
121	I	Ja, okay, du bist also so weit gekommen. Willst du noch was schreiben, oder sollen wir die nächste Aufgabe machen?
122	M	Ja, ich versuch das noch mal.
123	I	Ja, okay. Mach das.
124	M	Vielleicht kann man da (...) n plus eins, vielleicht. Hier ist n plus Null *(zeigt auf die erste Zeile)*, wenn man da jetzt die vier nimmt, dann kommt da ja auch vier raus.
125	I	Mmh.
126	M	Nee, dann kann man hier, nee das ist ja auch wieder komisch, da ist plus vier *(zeigt auf die erste Spalte, die erste und dritte Zeile)*, da plus sechs, da plus acht *(verfährt genauso in der zweiten und dritten Spalte)*. Das wäre irgendwie auch ne Lösung.
127	I	Welche?
128	M	Man rechnet jetzt zum Beispiel irgendwie n mal, mmm wie kann man das, n mal (...) n mal *(5 Sek. Pause)* vielleicht kann man (..) n mal zwei (..) wenn man das jetzt n mal zwei sind dann acht *(zeigt dabei auf die 4er Spalte)* plus sechs *(zeigt auf die 14)*, sechs *(zeigt auf die 3er Spalte, sieht dann auf die 11)* nee, geht auch nicht. Mmm (...)
129	I	Sag mal, also wie hast du dann fünf hier ausgerechnet *(zeigt auf die 5 in der 1er Spalte)*, nach welcher Methode, was hast du gemacht, um fünf zu bekommen?
130	M	Ähm, ich hab hier eins plus vier *(zeigt dabei auf die 1 und die 4 in der 1er Spalte)*.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.3 – KREISE - Michael – Fortsetzung

131	I	Aha, wie hast du acht *(zeigt dabei auf die 8 in der 2er Spalte)* rausgefunden?
132	M	Zwei und sechs, dann drei und acht, dann vier und zehn *(zeigt jeweils auf die ersten beiden Einträge in jeder Spalte)* und hier *(zeigt auf die letzten beiden Spalten)* dann das gleiche.
133	I	Addiert, okay. Und wenn du das mit dem n auch so machst?
134	M	Kann man ja vielleicht (..)
135	I	Was kommt dann raus?
136	M	*(8 Sek. Pause)* Ich weiß nicht, ob man das machen darf, mit n plus n plus zwei.
137	I	Probieren wir.
138	M	Weil wenn man jetzt n, also hier haben wir jetzt zum Beispiel die vier *(zeigt auf 4er Spalte)* und dann zum Beispiel jetzt plus n sind dann zum Beispiel (..) acht und dann kann man zwei dazu rechnen und dann hat man da auch vierzehn. Weil ich glaub wir hatten mal so ein Blatt, da mussten wir auch n plus n nehmen.
139	I	Mmh, schreibs auf und dann gucken wir, wir prüfen das einfach.
140	M	*(schreibt $n + n + 2$ in die n-Spalte)* plus zwei.
141	I	Mmh
142	M	Ja. *(5 Sek. Pause)* Ja.
143	I	Ist das richtig so?
144	M	Also, ich mein schon, weil man kann jetzt auch drei plus *(5 Sek. Pause)* drei plus zum Beispiel sechs und dann kann man ja plus zwei, oder zwei plus vier und dann plus zwei.
145	I	Okay.
146	M	Nee, jetzt hab ich es. Das ist falsch *(streicht das $n + n + 2$ durch)* etzt hab ich es nämlich richtig. Das ist nämlich n, wie war es jetzt noch mal *(6 Sek. Pause)*. Ach wie war es jetzt noch mal? Vielleicht kann man n minus zwei und dann plus, mal gucken, das geht *(sieht dabei auf die vorherigen Spalten)* dann zieht man ja von der vier *(zeigt auf die 4 in der 1er Spalte)* zum Beispiel jetzt zwei ab. Dann hat man ja eins plus zwei, dann sind das drei. Dann zieht man da zwei *(zeigt auf die zweite Spalte)*, ja eigentlich ging das dann vielleicht *(schreibt $n - 2 + 2$ auf)*.
147	I	Okay.
148	M	n plus zwei minus zwei. Wenn man da dann zwei abzieht *(zeigt auf die 8 in der 3er Spalte)*, sind sechs, dann haben wir neun, und dann plus zwei. (..) So könnte das eigentlich klappen.
149	I	Okay, gut.

Tabelle B.4: WÜRFELSCHLANGE - Kevin

I – Interviewerin; K – Kevin		
1	I	Was siehst du da? *(gibt dem Schüler einen kleinen Würfel)*
2	K	Ein Würfel in der Farbe rot.
3	I	Sehr gut. Äh, wie viele Quadrate kannst du da zählen?
4	K	Also, erst mal die Quadrate sind Flächen *(zählt leise)* sechs Flächen.
5	I	Ja, und wenn ein Würfelchen so liegt auf dem Tisch, wie viele Quadrate können wir dann sehen? Wie viele sind es dann?
6	K	Ach, also nur sehen. Ja, gut dann können wir fünf sehen.
7	I	Fünf, genau. Wieso fünf?
8	K	Weil das eine liegt auf dem Boden, also äh, auf dem Tisch und durch den Tisch können wir nicht durchgucken.
9	I	Richtig.
10	K	Ja, und auch wenn wir das jetzt so hinlegen würden *(dreht den Würfel auf eine andere Seite)*, das wären immer noch fünf Quadrate, weil der Würfel hat eigentlich, äh der ist eigentlich achsensymmetrisch, oder?
11	I	Puuh, ja, auch.
12	K	Der ist achsensymmetrisch, ja.
13	I	Wenn wir jetzt zwei nebeneinander legen würden *(gibt dem Schüler einen zweiten Würfel)*. Wie viele Quadrate würden wir dann sehen?
14	K	Mmh. *(legt die beiden Würfel aneinander)* Dann würden, also dann würden zwei Quadrate wegfallen dann würden wir vier, dann würden wir acht sehen.
15	I	Okay. Und jetzt werden wir versuchen, eine Regel zu finden, wie sich die Anzahl von Würfeln zur Anzahl von sichtbaren Quadraten verhält. Und, wie du es gerne machst, kannst du es hier aufschreiben *(gibt dem Schüler ein weißes Blatt)*. Also, die Anzahl von Würfeln und die Anzahl von sichtbaren Quadraten. Wir werden versuchen jetzt, so eine Gesetzmäßigkeit zu finden.
16	K	Dann mach ich das erst mal wie auf den Arbeitsblättern *(zeichnet Würfel auf sein Blatt)*
17	I	Oh, du brauchst das nicht zu zeichnen. Du kannst einfach sagen, also zuerst haben wir ein Würfelchen, also ein Würfel.
18	K	*(spricht unverständlich, versucht seine Zeichnung zu verbessern)*
19	I	Vielleicht machst du das neu, ja? Weil sonst verstehen wir nicht, was du meinst, also hier *(dreht das Blatt um)* Also, Anzahl von Würfeln und Anzahl von sichtbaren Quadraten, das würde uns interessieren. Du brauchst auch nicht zu zeichnen.
20	K	Okay, ein Würfel *(schreibt 1 Würfel auf sein Blatt)*

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.4 – WÜRFELSCHLANGE - Kevin – Fortsetzung

21	I	Und wie viele sichtbare Quadrate?
22	K	Fünf sichtbare Quadrate *(schreibt dabei)*. Zwei Würfel, ähm, acht sichtbare Quadrate *(schreibt dies auf sein Blatt)*.
23	I	Kannst du uns noch mal bitte sagen, wieso acht?
24	K	Mmm.
25	I	Wie hast du das gerechnet?
26	K	(...) Also, da sind ja immer zwei, zwei, vier, sechs, sieben, acht *(zeigt auf die Würfel)*
27	I	Okay. Drei?
28	K	*(legt einen dritten Würfel dazu)* (..) Dann kann man rechnen, drei, sechs, neun, zehn (zählt dabei die Quadrate), also elf Quadrate *(schreibt dies auf das Blatt)*
29	I	Mmh.
30	K	So, ich glaub ich hab auch schon die Formel. (..)
31	I	Schreib das auf. n Würfel, also.
32	K	n mal drei plus zwei. *(schreibt $n \cdot 3 + 2$)*
33	I	Mmh, kannst du das bitte erklären? Wenn wir fünf hätten?
34	K	Wenn wir fünf Würfel hätten?
35	I	Mmh.
36	K	Dann würden wir, also fünf ist ja n *(legt fünf Würfel aneinander)*, und fünf mal drei ist fünfzehn plus 2 sind siebzehn. Dann rechnen wir das jetzt mal nach. Das sind dann fünf, fünf, zehn, fünfzehn *(zeigt zunächst auf die vordere, dann die obere, dann die hintere lange Seite der Würfelschlange)*, sechzehn, siebzehn *(tippt dabei auf die beiden Ecken der Würfelschlange)*. Also, ja. Stimmt das.
37	I	Super, okay. Also, bei fünf sinds siebzehn, schreib das auf. Also, bei fünf Würfelchen, fünf und siebzehn, einfach kurz fünf oben, siebzehn unten.
38	K	Mmh. *(schreibt die Zahlen auf sein Blatt)*
39	I	Und wenn ich jetzt nicht fünf, sondern zehn nehmen würde *(fügt zu der Würfelschlange weitere fünf Würfel hinzu)*. Wie viele Quadrate wären dann sichtbar, was meinst du?
40	K	*(6 Sek. Pause)* Zwölf (..) nein, nein, nicht zwölf, ähm, zweiunddreißig.
41	I	Mmh, und wie machst du das?
42	K	Also, ich hab ja *(zeigt auf die vordere lange Seite der Würfelschlange)* hier längs, sagen wir jetzt mal, hab ich ja immer zehn, die rechne ich dann ja mal, mal drei und das sind komischerweise auch zehn Würfel, also zehn, zwanzig, dreißig *(zeigt zunächst auf die vordere, dann die obere, dann die hintere lange Seite)* einunddreißig, zweiunddreißig *(zeigt auf die beiden Ecken)*.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.4 – WÜRFELSCHLANGE - Kevin – Fortsetzung

43	I	Also, bei zehn zweiunddreißig.
44	K	Ja.
45	I	Okay, gut.

Tabelle B.5: WÜRFELSCHLANGE - Laura

I – Interviewerin; L – Laura		
1	I	Was hast du da? *(gibt L einen Würfel)*
2	L	Ein Quadrat.
3	I	Nee, das nennt man (.)?
4	L	Würfel.
5	I	Würfel, okay. Wie viele Flächen siehst du hier?
6	L	Ähm, sechs Stück.
7	I	Sechs Stück. Und wenn wir das Würfelchen so auf den Tisch legen? Von allen Seiten betrachtet?
8	L	Dann sieht man nur fünf.
9	I	Ja.
10	L	Wenn man den jetzt dreht, weil die eine Fläche ist verdeckt, weil man den hinstellt.
11	I	Okay. Wir werden jetzt versuchen, eine Verbindung herzustellen zwischen der Anzahl von Würfeln und der Anzahl von Quadraten, die sichtbar sind, indem wir Würfelschlangen herstellen werden *(legt den Würfel vor sich auf den Tisch und schiebt einen zweiten Würfel an den ersten dran)*.
12	L	Dann mache ich das mal hier. Ein Würfel, fünf *(schreibt auf das Blatt: 1 Würfel, 5 Q; 2 Würfel, 8 Q. Legt einen dritten Würfel an die Schlange und zählt leise die Quadrate)* Das sind elf sichtbare.
13	I	Wie rechnest du? Zeig es einfach.
14	L	Ich habe jetzt erstmal gezählt und dann habe ich überlegt ob das stimmt, weil ich habe jetzt überlegt, acht.
15	I	Aber wie hast du gezählt, kannst du mir das bitte zeigen?
16	L	Also, okay, ich glaube ich habe es sogar falsch, also eins zwei *(zählt zunächst die beiden einzelnen Seiten)* drei, vier, fünf *(zählt die hintere lange Seite)* sechs, sieben, acht *(zählt die vordere lange Seite)* neun, zehn, elf *(zählt die obere lange Seite)*.
17	I	Ja. Das stimmt, mmh.
18	L	Okay, das sind dann *(schreibt 3 W, 11 Q auf)*, ach, das sind dann elf.
19	I	Also, drei Würfel, elf, okay.
20	L	Ich glaube, dann sind das hier vierzehn.
21	I	Mmh, weshalb bist du so sicher?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.5 – WÜRFELSCHLANGE - Laura – Fortsetzung

22	L	*(Schreibt 4 W, 14 Q)* Ähm, weil ich, mir ist was aufgefallen, ich glaube, dann habe ich auch schon die Gesetzmäßigkeit. Weil man die n immer plus drei rechnen muss, weil der Würfel kommt zu einem anderen dazu, verdeckt glaube ich, ja, eine Seite verdeckt er und drei kommen dazu dann. Es kommen immer drei Seiten dazu weil eine
23	I	Kannst du bitte zeigen welche? Was wird verdeckt?
24	L	*(Nimmt einen vierten Würfel dazu)* Also, diese beiden unten und an der Seite *(zeigt auf die Bodenseite des vierten Würfels und auf die rechte Fläche des vierten Würfels, die beim Zusammenschieben verdeckt wird)* werden verdeckt, zwei Stück. Und dann bleiben noch eins, zwei, drei, vier *(zählt die sichtbaren Quadrate an dem vierten Würfel)*, nein vier bleiben übrig, mmm, (..) ja dann die schließen sich an den anderen Würfel ran dann bin ich immer auf plus drei gekommen, also darauf gekommen, weil zuerst waren es fünf und beim zweiten Würfel waren es acht, und da waren immer drei, sage ich mal, Quadrate kamen dazu.
25	I	Ich habe es schon verstanden, dass du einfach mit Zahlen überlegt hast, ja? Die Differenz zwischen acht und fünf wäre drei, zwischen elf und acht drei, und da bist du auf vierzehn gekommen. Das habe ich schon verstanden. Aber welche drei?
26	L	Ähm.
27	I	Wie du erklärst, sollen eigentlich insgesamt sechs dazukommen, habe ich das richtig verstanden? Weil der Würfel auf dem Tisch steht sind es nur fünf und dann wird eins verdeckt und es sind nur vier, aber du sagst immer plus drei, und das verstehe ich nicht.
28	L	Ja, weil mmm, hier *(zeigt auf den dritten Würfel der Viererschlange)* sieht man jetzt zum Beispiel nur drei. Nur die äußeren *(zeigt auf die äußeren Würfel)* haben noch ihre vier Kanten und die in der Mitte haben nur drei und man verdeckt ja sozusagen von dem anderen Würfel noch eine Kante, weil die ist ja vorher frei, dann hat er nämlich auch vier *(nimmt den vierten Würfel kurz weg)* und dann wird sie zugedeckt und da sind dann nur drei noch. Und dann bin ich auch drauf gekommen wegen den Zahlen und ich würde sagen, weil hier in der Mitte, das sind zwei, die haben drei Seiten und das sind vier *(zeigt zunächst auf die Würfel in der Mitte, dann auf die äußeren)*, die haben dann vier Seiten.
29	I	Aha, ziemlich clever. Okay. Was wird dann bei fünf sein? *(gibt L einen fünften Würfel)*
30	L	*(Legt den Würfel an die Schlange dran)* Ähm, bei fünf *(schreibt 5 W, 17 Q)*
31	I	Mmh, wie bist du auf siebzehn gekommen?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.5 – WÜRFELSCHLANGE - Laura – Fortsetzung

32	L	Da habe ich wieder plus drei gerechnet, weil diesmal, da wird diese Seite weggenommen *(zeigt auf das linke äußere Quadrat des vierten Würfels)* dann hat der nur noch drei *(zeigt auf den vierten Würfel)* und der hat vier *(zeigt auf den fünften Würfel)*. Der verdeckt sozusagen eine Seite und zwei werden weggenommen oder drei werden weggenommen, ich glaub deshalb bin ich auch drei gekommen, das ist mir gerade erst aufgefallen, weil drei werden weggenommen, die, die und die da unten *(zeigt auf die Bodenseite des fünften Würfels und die beiden Seiten, an denen der vierte und fünfte Würfel zusammengeschoben werden)*.
33	I	Mmh, von sechs drei wird, alles klar. Es sollten eigentlich, wenn die Welt noch in Ordnung wäre, sechs sein, aber drei werden immer weg genommen.
34	L	Ja, wenn man den Würfel an was anderes dran schließt.
35	I	Kannst du das als Gesetz aufschreiben? Als Formel?
36	L	Ja, ähm, dann würde ich n plus drei sagen einfach mal *(schreibt $n + 3$ auf)* (...) nee, wenn jetzt zum Beispiel der erste, warte mal, ja, es würde gehen, wenn der erste Würfel fünf sind dann plus drei, das sind acht und immer so weiter, das geht. Oder man kann es auch aufschreiben sechs minus
37	I	Ja, schreib es auf.
38	L	Man könnte auch n minus drei machen, das müsste auch gehen, wenn man das bei diesem Würfel *(zeigt auf die Spalte mit 2 W)* anwendet, dann kann man zurückgehen, sozusagen. Und eigentlich müsste es n minus drei sein, da muss man, weil dann kriegt man auch die fünf raus, weil ähm. Also n ist jetzt mal acht und dann minus die drei sind fünf und dann hat man auch den ersten Würfel raus. Weil drei werden weggenommen und naja, ich weiß es auch nicht genau.
39	I	Ja, okay. Wie würdest du bei zehn rechnen? Zehn Würfel? *(schiebt weitere fünf Würfel an die Schlange ran)*
40	L	Zehn Würfel?
41	I	Ja.
42	L	Zehn Würfel, mmm, das sind zehn Würfel, mmm (..) kann man wieder mit mal rechnen, glaube ich. Ich schreibe mal was auf (schreibt $n \cdot 3 + 2$ auf; flüstert) dann wüsste ich jetzt eine Gesetzmäßigkeit für zehn. Dann drei mal zehn, dann ist jetzt das *(zeigt auf n)* zehn *(schreibt unter das $n \cdot 3+2$ den Term $10 \cdot 3+2$)* drei mal zehn plus zwei das sind gleich 30 plus zwei, sind gleich 32 *(schreibt $= 30 + 2 = 32$)*. Sind dann 32 Quadrate.
43	I	Wie bist du auf n mal drei plus zwei gekommen?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.5 – WÜRFELSCHLANGE - Laura – Fortsetzung

44	L	Ähm, da habe ich mir überlegt, das sind zwei Würfel *(zeigt auf ihre 2er Spalte)* und dann habe ich überlegt, was kommt in die Nähe von acht und das sind dann drei, zwei mal drei sind sechs, und dann habe ich mir überlegt, wie viel es bis zur acht wird und das sind zwei, weil die, weil die drei, nein die zwei kann keine acht, doch kann sie wohl, mit zwei mal vier, aber das geht dann bei den anderen nicht *(zeigt auf die anderen Spalten)*, weil drei kann nicht auf die elf kommen und drei mal drei sind neun und plus zwei sind elf. Dann geht das auch da *(zeigt auf die erste Spalte)* denn drei mal eins sind drei plus zwei sind fünf und hier *(zeigt auf die letzten Spalten mit 4 W und 5 W)* ist das genauso.
45	I	Okay, möchtest du noch prüfen, ob das tatsächlich 32 sind?
46	L	Ja *(zählt leise)*. Das sind 30 dann, das sind zwanzig, 30, 32, stimmt.
47	I	Ja, ganz clever. Und bei 50?
48	L	50, okay, das sind dann, mmm, das muss ich dann wieder anwenden, das sind dann, drei mal die 50 (.) das sind 250, 252 müsste das dann sein.
49	I	Drei mal 50 wäre 150.
50	L	Ja, stimmt, dann 150, wäre 152.
51	I	Okay, super.

Tabelle B.6: WÜRFELSCHLANGE - Michael

I – Interviewerin; M – Michael		
1	I	Was ist das? *(gibt M einen Würfel)*
2	M	Ein Würfel.
3	I	Okay, das ist ein Würfel. Nimm das bitte in die Hand. Wieviele Quadrate siehst du?
4	M	Das sind zwei, vier, sechs.
5	I	Sechs, okay. Und wenn du deinen Würfel dann bei dir auf den Tisch legst *(legt den Würfel auf den Tisch)*. Wie viele Quadrate sind dann sichtbar wenn wir dann fünf, nur fünf. Richtig. Wir werden jetzt versuchen, ein Gesetz zusammenzustellen, eine Regel, was passiert wenn wir noch ein Würfelchen dazustellen würden *(stellt einen zweiten Würfel an den ersten heran)* und dann noch einen und dann noch einen. Wieviele Quadrate wären dann sichtbar, beim Bau so einer Würfelschlange, okay? Bei einem Würfelchen haben wir
6	M	Fünf, da muss, dann rechnet man
7	I	Und zwei (..) nebeneinander?
8	M	Dann hat man sechs, wie bei einem ganzen Würfel, nee, (..) acht.
9	I	Richtig. Zeigst du mir bitte diese sechs?
10	M	Zwei, sechs, acht *(zeigt die acht Quadrate)*
11	I	Ahja, und diese, okay. Ja, acht. Und dann nochmal und nochmal und um eine Gesetzmäßigkeit zu entdecken müssen wir das alles aufschreiben, okay? *(gibt dem Schüler ein weißes Blatt)* Also, wir werden jetzt die Anzahl von Würfelchen und die Anzahl von sichtbaren Quadraten gegenüberstellen und einfach vergleichen, was da passiert, okay? (...) Zwei Ergebnisse hast du schon, ein Würfel fünf Quadrate, zwei Würfel acht Quadrate.
12	M	Ja, dann kommen bei drei Würfeln
13	I	Also schreib es erstmal auf.
14	M	Also, mach ich jetzt einfach mal eins, mach ich einfach mal ne Tabelle *(schreibt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in eine Reihe)*
15	I	Ja, das ist eine gute Idee. (..) Halt.
16	M	Ja, so reichts. Und dann jetzt *(zeichnet eine Tabelle)*
17	I	Also, ein Würfel und dann hattest du gesagt fünf Quadrate.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.6 – WÜRFELSCHLANGE - Michael – Fortsetzung

18	M	Genau, mach ich noch *(vervollständigt die Striche der Tabelle)* So. Bei einem Würfel waren dann jetzt (..) ja (..) fünf Quadrate *(schreibt eine 5 unter die 1 in die Tabelle).* Wenn man den zweiten dann da dran tut, hat man acht *(schreibt eine 8 unter die 2)*, dann tut man noch einen dritten dazu *(fügt einen dritten Würfel zu der Schlange dazu)* dann hat man, dann muss man eigentlich einen abziehen und vier dazu rechnen. Nee drei dazu rechnen, man zieht einen ab und rechnet drei dazu. Dann kommt eigentlich, jetzt kommt da eigentlich (..) müsste eigentlich (..) geht gar nicht, erstmal zähl ich. Also, drei, sechs, nee, das sind vier, sieben *(zählt die Quadrate)* dann noch plus vier, ja sind elf, also kann man dann
19	I	Elf ist richtig, ja. Wie hast du gezählt? Kannst du es erklären?
20	M	Kann man eigentlich ganz leicht ausrechnen. Also, gezählt habe ich vier *(zeigt auf die vier Quadrate am ersten Würfel)* plus drei *(zeigt auf die sichtbaren Quadrate am mittleren Würfel)* sind sieben und dann noch plus die vier *(zeigt auf die sichtbaren Quadrate am letzten Würfel)*, aber das kann man auch ganz einfach ausrechnen. Man hat jetzt acht *(stellt zwei Würfel aneinander auf den Tisch)* dann rechnet man acht, man kann, die Endzahl nehm ich jetzt mal. n minus eins plus vier *(fügt den dritten Würfel wieder zu der Würfelschlange hinzu).*
21	I	Schreib es bitte unten auf, dann prüfen wir das.
22	M	n minus eins plus vier *(schreibt dies auf).*
23	I	Okay, und dann bleiben wir erstmal bei drei. Also, wie hast du gerechnet, vier plus drei plus vier, hast du gesagt, oder?
24	M	Ja, vier plus drei plus vier. (..) Weil hier sieht man vier Würfel, kann man auch vier, vier sind acht *(zeigt auf die beiden äußeren Würfel)* und drei sind elf *(zeigt auf den mittleren Würfel).*
25	I	Ja, schreib bitte elf in die Tabelle rein.
26	M	*(schreibt 11 in die Tabelle)* So *(nimmt einen weiteren Würfel in die Hand)* Da kann man jetzt auch wieder elf minus eins *(fügt den Würfel an die Schlange heran)* plus vier rechnen, weil man hat wieder einen abgezogen und dann rechnet man vier dazu, dann kommt da dreizehn raus.
27	I	Mmh.
28	M	Nee doch, nein vierzehn, man rechnet ja nicht minus zwei und dann ist in der Tabelle
29	I	Also nochmal, das hab ich nicht verstanden.
30	M	Also, man hat die drei Würfel *(nimmt drei Würfel von der Schlange weg und legt sie aneinander).*

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.6 – WÜRFELSCHLANGE - Michael – Fortsetzung

31	I	Bei drei haben wir elf.
32	M	Ja. Dann zieht man einen, eine Fläche ab *(zeigt auf die Fläche, an die der vierte Würfel herangeschoben wird)* und rechnet man plus vier *(zeigt auf die Quadrate am vierten Würfel)*, weil diese Fläche wird ja verdeckt man rechnet immer plus vier und dann hat man vierzehn da raus. Man kann das jetzt auch mal zählen. Vier, sieben, zehn und dann vierzehn *(zeigt dabei nacheinander beim ersten, zweiten, dritten, vierten Würfel auf die sichtbaren Quadrate)*.
33	I	Ja, schreib das bitte auf, vierzehn.
34	M	*(schreibt 14 unter die 4)*
35	I	Deine Rechnung ist interessant. Kannst du das bitte hier drunter schreiben, also das war elf zuerst.
36	M	Also elf minus eins plus vier *(schreibt dies)*.
37	I	Gleich?
38	M	Gleich vierzehn *(schreibt* $= 14$*)*.
39	I	Okay, weiter *(gibt dem Schüler einen fünften Würfel)*.
40	M	Ja, dann könnte man ja wieder minus eins, weil die Fläche wieder verdeckt wird plus vier.
41	I	Schreib es auf.
42	M	Sind dann (..)
43	I	Kannst du unten bitte die Rechnung schreiben?
44	M	Ja, erstmal Rechnung.
45	I	Ja, wie du rechnest.
46	M	Vierzehn minus eins plus vier gleich siebzehn *(schreibt dies)* und dann kommt da die siebzehn rein *(schreibt unter die 5 eine 17 in die Tabelle)*.
47	I	Mmh, wunderbar. Kannst du jetzt für n vielleicht?
48	M	Hab ich ja *(zeigt auf das* $n - 1 + 4$*)*.
49	I	So eine Regel erstellen? Mit n.
50	M	n minus eins plus vier, man hat jetzt irgendeine Zahl, zum Beispiel(..)
51	I	Zum Beispiel zwei *(zeigt auf die 2 in der Tabelle)*
52	M	Ja, dann hat man zwei Würfel.
53	I	Zwei Würfel, okay, überprüfen wir, ob das funktioniert für zwei Würfel.
54	M	Also, erstmal hat man einen Würfel, und dann tut man den zweiten da dran und dann sieht man noch, da wurde eine Fläche verdeckt, und dann hat man noch vier statt fünf und dann rechnet man noch plus vier. Dann hat man acht raus, bei der zwei.
55	I	Okay, also bei zwei Würfelchen, du fängst mit einem Würfel an, wieviele Quadrate sind da?
56	M	Fünf *(legt einen Würfel alleine hin)*

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.6 – WÜRFELSCHLANGE - Michael – Fortsetzung

57	I	Schreib das auf bitte.
58	M	Fünf *(schreibt 5)*
59	I	Dann rechnest du minus
60	M	Minus eins und dann plus vier *(legt einen zweiten Würfel an den ersten heran)*
61	I	Schreib es auf.
62	M	*(schreibt* $5 - 1 + 4$*)*
63	I	Gleich?
64	M	Gleich acht *(schreibt* $= 8$*)*, weil dann hat man vier plus vier.
65	I	Ja, aber fünf ist nicht n, n ist dann bei uns zwei, weil n ist die Anzahl von Würfelchen. (..) Also, deine Idee habe ich schon verstanden, also das funktioniert, wie du das machst.
66	M	Achso.
67	I	Ja, aber n.
68	M	(..) Vielleicht, wenn das jetzt die Anzahl der Würfel ist, dann hat man ja erst einen Würfel.
69	I	Ja.
70	M	Wie soll man das denn dann machen? *(sieht sich einen Würfel an)* und der Würfel hat dann ja fünf Seiten, aber, mmm *(7 Sek. Pause)*
71	I	Okay, wieviel hast du bei fünf?
72	M	Bei fünf ist ein Würfel.
73	I	Nee, bei fünf Würfelchen zusammen.
74	M	Achso, bei fünf hab ich dann siebzehn *(schaut in die Tabelle und schiebt 5 Würfel zusammen)*.
75	I	Aha, du hast siebzehn. Sag mir, wieviele würdest du bei zehn haben *(legt eine weitere 5er Schlange auf den Tisch)*, wenn wir alle zehn in eine Schlangenlinie zusammenfügen?
76	M	Bei zehn hat man dann *(schiebt beide kurze Schlangen aneinander)*, man hat zehn Würfel, dann kann man (..) mmm *(5 Sek. Pause)* bei zehn (..) hat man eigentlich (...) man kann eigentlich vier und vier sind dann acht *(zeigt auf die beiden äußeren Würfel)* und dann hat man ja neun, ach acht mal die drei (.) ja dann rechnet man acht mal drei.
77	I	Ja, schreib das bitte auf, ja?
78	M	Also, acht plus acht plus *(schreibt)*
79	I	Das habe ich nicht verstanden, wo sind acht?
80	M	Also acht und acht, ach *(streicht das Geschriebene durch)* vier plus vier *(schreibt dies auf)*
81	I	Welche vier?
82	M	Also, vier sind das und das sind auch vier, das sind dann die Enden.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.6 – WÜRFELSCHLANGE - Michael – Fortsetzung

83	I	Achso, die Enden, klar.
84	M	Und dann kann man da eigentlich nen Term draus machen (..) weil dann mach ich jetzt mal (..) plus neun mal drei *(schreibt dies auf)*
85	I	Welche neun?
86	M	Das sind die, oh nein, acht, acht mal drei *(macht aus der 9 eine 8)* wieder Klammer zu und dann mach ich ein gleich *(dort steht nun:* 4+4+(8·3) =*)*. Da rechnet man jetzt acht mal drei sind dann vierundzwanzig, und dann die acht, also vier plus vier sind acht, sind dann zweiunddreißig, dann sind das hier zweiunddreißig Kästchen *(schreibt 32 als Ergebnis auf)*.
87	I	Okay. Sehr gut.
88	M	Ja, das kann man eigentlich (...) n plus (..) n plus acht (..) plus *(5 Sek. Pause)* n plus acht *(schaut kurz seine Tabelle und dann die Schlange an)* plus (..) n plus acht plus n, also kommt drauf an, was man da *(zeigt in Richtung seiner Tabelle)* jetzt für eine Zahl hat.
89	I	Ja, okay, gut.
90	M	Also hier *(zeigt auf seine letzte Rechnung)* ist das dann immer acht mal drei und dann hat man immer (...) also kann man n plus acht plus n (schreibt $n + 8 + n$) machen. Eigentlich.
91	I	Okay.

Tabelle B.7: ZAHLENSUMME - Kevin

I – Interviewerin; K – Kevin		
1	K	Jetzt wenn man die, diese Zahlen addiert *(schreibt 6, 7 und 8 auf)*, also 6 plus 7 plus 8 sind ähm (..)
2	I	Ja, mach das. Schreib das auf.
3	K	Sind 21. Und 21 soll jetzt durch 3 teilbar sein.
4	I	Ja.
5	K	Und 21 ist durch 3 teilbar.
6	I	Richtig, also so ist das gemeint.
7	K	Ja, so ist das gemeint und das ist ja hier als Feststellung formuliert, also nehm ich mal an, dass das stimmt.
8	I	Schreib ein plus dazwischen, 6 plus 7 plus 8.
9	K	Ja *(schreibt* $6 + 7 + 8 = 21 : 3 = 7$ *in die nächste Zeile).*
10	I	Ist wie viel?
11	K	7
12	I	7, aha. Okay.
13	K	Ja. *(8 Sek. Pause)* Aber wenn wir das doch jetzt mit allen, also mit allen natürlichen Zahlen versuchen würden, dann wären wir ja noch ewig beschäftigt. Also, dann müssten wir ja noch 1, 2, 3; 2, 3, 4 (.) alles Mögliche müssten wir dann ja noch nehmen.
14	I	Ja, oder geht's vielleicht anders, vielleicht können wir uns überlegen: Stimmt das für alle, ohne alle auszuprobieren? Okay, ich gebe dir jetzt Hilfen, nämlich solche Quadrate hab ich hier vorbereitet, die stehen können sagen wir für 1, 2, 3 *(legt jeweils eins, zwei, bzw. drei quadratische Plättchen aneinander)* das sind drei aufeinander folgende Zahlen. Okay?
15	K	Okay, ja.
16	I	Du kannst auch das zur Hilfe nehmen und überlegen. Oder (*legt einen Zahlenstrahl auf den Tisch)* Das ist bekannt, oder?
17	K	Ääh, ja.
18	I	Das hatten wir gemacht. Also, das sind auch Zahlen (*legt kleine Zettel mit Zahlen auf den Tisch)*, die du da rein platzieren kannst und da sind auch beliebige Zahlen *(legt Zettel mit* n*,* $n+1$ *und* $n-1$ *auf den Tisch)*, wenn du es mit n versuchen würdest. Also, du kannst jetzt überlegen, was du als Hilfe nimmst, um das allgemein zu begründen, dass das wirklich so funktionieren kann für alle Zahlen. Ohne dass wir jetzt alle Zahlen ausprobieren müssen, das würde ein bisschen dauern.
19	K	Mmh. *(10 Sek. Pause) (legt eine Plättchendarstellung für die Zahlen 1, 2 und 3;, verschiebt diese dann so lange, bis sie die 2, 3 und 4 symbolisieren sollen, währenddessen Sprechpause)*

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.7 – ZAHLENSUMME - Kevin – Fortsetzung

20	I	Das hab ich jetzt nicht ganz verstanden. Ahja, 2, 3, 4.
21	K	Ich hab das jetzt einfach mal ausprobiert, weil ich glaub nämlich, dass die, also wenn man das jetzt so hinlegt, dass dann immer dasselbe noch mal dazu passt, sozusagen.
22	I	Mmh.
23	K	Also, wenn das jetzt hier *(zeigt auf die Plättchen)* ein Dreieck wär, dann könnte man das andere Dreieck da drauf setzen und dann ist es ein Quadrat. Und ich glaub, das hängt irgendwie damit zusammen.
24	I	Aha.
25	K	*(nimmt sich welche von den kleinen Zetteln)* 3, *(legt die 3 an den Zahlenstrahl)* 5, *(legt diese zwei Plätze weiter)* und 4 *(legt diese in die Mitte der beiden anderen Zahlen)* das wären dann 7, 12 (...) 4. *(5 Sek. Pause)* Aah, ich hab schon mal was neues herausgefunden (..) wenn man 6, 7. Also z.B. hier bei 6, 7 plus 8 *(zeigt auf seine Rechnung)* gleich 21 durch 3 gleich 7, also das ist immer gleich die mittlere Zahl.
26	I	Ja.
27	K	Also, das hab ich da *(zeigt auf die Zettel mit Zahlen 3, 4 und am Zahlenstrahl)* da war das auch gleich die 4, mmm.
28	I	Mmh.
29	K	Aber da steht doch eigentlich nirgendwo, dass die natürlichen Zahlen immer in der Reihenfolge ist, dass es, ähm, also 3, 4, 5, dass es immer einen höher geht, es könnt jetzt auch
30	I	Doch. Die sind aufeinander folgend, also die müssen dann eins höher gehen.
31	K	Okay.
32	I	Das ist wichtig, dass die nacheinander kommen. 3, 4, 5 oder wie du es genommen hast 6, 7 und 8.
33	K	*(nimmt sich drei neue Plättchen dazu und legt diese mit der roten Seite nach oben an die anderen an, so dass ein Quadrat entsteht; 55 Sek. Sprechpause)*
34	I	Also, hier hast du etwas Interessantes entdeckt bei denen da, aber etwas dazu zu geben, also diese drei roten das können wir nicht die haben wir nicht. Wir haben nur diese 2, 3 und 4.
35	K	Mmh. Oder auch andere Zahlen.
36	I	Ja, zum Beispiel. *(7 Sek. Pause)* Ist nicht einfach?
37	K	Mmh.
38	I	Okay, wenn wir beim Zahlenstrahl bleiben. Kannst du das vielleicht mit n versuchen? *(schiebt K den Zettel mit n zu)* Für eine beliebige Zahl?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

		Tabelle B.7 – ZAHLENSUMME - Kevin – Fortsetzung
39	K	Ja, dann tun wir n mal an die Stelle von der *(legt n dahin, wo vorher die 5 lag und nimmt auch die anderen beiden Zahlen vom Zahlenstrahl weg) (5 Sek. Pause)*. Ja, dann versuchen wir das jetzt mal rückwärts. Dann ist n jetzt (..) mal unser Ergebnis, also das hier *(zeigt auf vorherige Rechnung $6+7+8=21:3=7$ auf dem Blatt und umkreist das Ergebnis 7)*. Und dann rechnen wir das also mal (...) mal 3, *(flüstert unverständlich)* 5 als Beispiel nehmen, mal 3 sind 15, und dann müssen wir 15 jetzt in drei aufeinander folgende natürliche Zahlen zerlegen. Also 15 gleich *(schreibt $15 =$ auf das Blatt)* was könnte man denn da nehmen? *(9 Sek. Pause) (flüstert unverständlich, schreibt zunächst $5+6+7$ auf, streicht dies dann durch und schreibt $4+5+6$)* Mit der 15, das lässt sich zerlegen in 4 plus 5 plus 6. Also kann man es auch rückwärts machen.
40	I	Und wie hast du das rückwärts gemacht? 15 habe ich verstanden, und wieso nimmst du 4, 5 und 6?
41	K	Mmm, weil man das ja dann in die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen zerlegen, sagen wir mal, muss, weil eigentlich macht mans ja so wies hier steht, also vorwärts.
42	I	Mmh, genau.
43	K	Ja (...) Also, ich denke mal, dass die, dass die Formel dazu dann wäre (..) n mal 3, mmm *(schreibt dabei, 6 Sek. Pause)* gleich drei natürliche Zahlen, nee, dass muss man ja anders ausdrücken.
44	I	Doch. Das ist klasse, was du jetzt gerade machst, n mal drei, das ist genau, was du mit 15 gemacht hast, oder?
45	K	Ja, genau, das hab ich ja mit 15 und das dann versucht in drei natürliche Zahlen zu zerlegen.
46	I	Genau, die nacheinander folgen. Aha. Wie könnte, also wie hast du das mit 15 gemacht? Könntest du mir das noch mal erklären? Du hast 5 mal 3 gesagt und 15 rausbekommen.
47	K	Mmh, ja.
48	I	Und wie kommst du auf 4, 5 und 6 dann?
49	K	Weil ich das ja in drei aufeinander folgende natürliche Zahlen zerlegen muss, die, die halt aufeinander folgen und trotzdem 15 ergeben.
50	I	Mmh.
51	K	Aber zum Beispiel 5 plus 5 plus 5 könnte ich ja jetzt nicht nehmen.
52	I	Ja.
53	K	Es müssen ja drei aufeinander folgende Zahlen sein, deswegen muss man sich die dann suchen, aber das kann man ja schlecht in einer Formel ausdrücken.
54	I	Aber wie sucht man diese Zahlen? Erklär mal.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.7 – ZAHLENSUMME - Kevin – Fortsetzung

55	K	Ja, also ich habs jetzt durch Ausprobieren, aber (..) Die mittlere Zahl ist immer, wenn man das direkt durch 3 teilen müsste, und dann immer von, also die rechte Zahl ist dann immer der Nach, der Nachfolger und die linke Zahl ist der Vorgänger, aber wie man das jetzt ausdrücken soll, das weiß ich nicht.
56	I	Also, wenn du die Zahl n genommen hast, guck mal was du da platziert hast (*zeigt auf den Zahlenstrahl)* was wäre dann der Nachfolger für n?
57	K	n plus 1, also ja das andere wäre n minus 1 *(legt dabei die Zettel mit n+1 und n -1 an die entsprechenden Stellen an den Zahlenstrahl).* Äh, achso, ja gut, dann schreiben wir gleich n minus 1 plus n plus. Nein plus n plus n plus 1 *(schreibt dabei $n-1+n+n+1$)* also n mal drei gleich n minus 1 plus n plus n plus 1. Aber das würde ich dann einklammern, also n und n plus 1 *(klammert jeweils $n-1$, n und $n+1$ ein).*
58	I	Und stimmt das, dass das n mal 3 wird, wenn wir alle diese drei Zahlen addieren?
59	K	Ja.
60	I	Warum?
61	K	Ähm, *(18 Sek. Pause)* Ja, weil die ja auch durch 3 teilbar ist, nee falsch, das nicht.
62	I	Also, was passiert, wenn wir n minus 1 plus n plus n plus 1 addieren, wie du es geschrieben hast?
63	K	Dann kann man das Ergebnis durch 3 teilen und dann kommt n raus.
64	I	Und warum?
65	K	Ja, weil es eigentlich so ist, wie es da steht *(zeigt auf die Aufgabenstellung).*
66	I	Ja, also das ist mit einem Fragezeichen, sozusagen, das würden wir gern sagen, das ist so ein Gesetz, aber wir müssen das irgendwie begründen.
67	K	Ja. Man könnte da ja jetzt die Umkehrformel machen. Also, der Gegensatz. Also, das wäre dann n minus 1 plus n plus n plus 1 *(schreibt $(n-1)+n+(n+1)$).*
68	I	Also, was passiert, wenn wir das addieren?
69	K	Ähm, *(13 Sek. Pause)* durch 3 gleich n *(schreibt hinter die Summe $:3=n$).*
70	I	Das weiß ich nicht.
71	K	Ja, aber
72	I	Das stimmt sogar. Aber, mmm, einfach so vielleicht durch 5 gleich 5. Verstehst du, was ich meine? Ich weiß es nicht, wir behaupten das nur.
73	K	Ja.
74	I	Weil es so sein muss oder sollte.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.7 – ZAHLENSUMME - Kevin – Fortsetzung

75	K	Aber wenn man eigentlich testen müsste, ob ne Formel so ist, wie man sie hingeschrieben hat, dann müsste man es ja eigentlich bei allen auspro- bieren, weil (..) , oder gibt es eine Formel zur Überprüfung von Formeln?
76	I	Nee, das nicht, das müssen wir irgendwie begründen. Aber ja gut. Okay.
77	K	Ja.

Tabelle B.8: ZAHLENSUMME - Laura

I – Interviewerin; L – Laura		
1	L	Okay, dann mach ich das jetzt mal mit einem Beispiel *(schreibt* $1+2+3=6$*)* sind 6 und die 6 kann man durch teilen, die kann man durch 3 teilen, das sind dann 2.
2	I	Mmh.
3	L	Okay, dann würd ich *(schreibt* $2+3+4=9$*)* sind 9, geht auch, dann 4 plus 5 plus 6 (..) sind 15 *(schreibt* $4+5+6=15$*)*, das geht auch. Könnte das dann vielleicht gehen, dass dann alle Zahlen gehen, wenn man immer so weiter geht, also wenn dann 5 plus 6 plus 7, das sind dann, schreib ich kurz auf *(schreibt* $5+6+7=18$*)* 18, das sind 18 und dann geht das durch 3, ja geht. Dann müssten eigentlich alle Zahlen gehen, dann versuch ich jetzt mal höhere Zahlen. 11 plus 12 plus 13 *(schreibt* $11+12+13$ *als neue Spalte auf, rechnet und flüstert)* 35 müsste auch gehen.
4	I	11, 12 und 13 (..)
5	L	Ähm, ja, 36 (*schreibt 36)*. Ja, es müssten eigentlich dann alle Zahlen gehen, denke ich, wenn ich mir das ansehe.
6	I	Ja, kann sein, aber definitiv können wir das nicht sagen, das sind nur einige Beispiele. Ich möchte gern, dass du versuchst, jetzt zu argumentieren, indem ich dir diese Hilfen gebe *(legt quadratische Plättchen auf den Tisch)*. Quadrate, die du jetzt benutzen kannst, aber auch *(legt einen Zahlenstrahl auf den Tisch)*, Zahlenstrahl und Zahlen, damit du überlegen kannst *(legt kleine Zettel mit Zahlen auf den Tisch)*. Okay? Und allgemein auch *(legt kleine Zettel mit* n*,* $n+1$*,* $n-1$ *und* $n+2$ *auf den Tisch)*. Also, versuch bitte, zu begründen, dass es tatsächlich bei allen Zahlen so funktionieren kann. Weil momentan ist es nur eine Vermutung, es sieht so aus, genau wissen wir es nicht.
7	L	Mmm *(18 Sek. Pause, L greift nach drei Zetteln mit Zahlen 5, 6 und 7und legt diese an den Zahlenstrahl)*. Dann leg ich jetzt mal ein Beispiel. Und wenn man die plus nimmt, dann ist das durch 3 teilbar.
8	I	Ja.
9	L	Mmm, jetzt leg ich mal, dann leg ich am besten noch mal *(legt neben die 5, 6, 7 eine aus den Zettelchen mit 1 und 8 zusammengesetzte Zahl 18 an den Zahlenstrahl, wobei sie die Zahlenkarten in die Intervalle und nicht auf die Punkte legt)*. Mmm.
10	I	Was kommt nach 7?
11	L	Die 8, aber ich hab jetzt hier sozusagen das Ergebnis, hab ich jetzt gemacht.
12	I	Achso, das ist die Summe von allen drei?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.8 – ZAHLENSUMME - Laura – Fortsetzung

13	L	Ja.
14	I	Alles klar.
15	L	Mmm *(6 Sek. Pause)*. Könnte es bei allen sein? *(4 Sek. Pause)*
16	I	Also, die Frage ist, warum sollte es bei allen so sein, muss sogar irgendwie, oder?
17	L	Vielleicht weil das immer drei Zahlen sind die immer, weil es immer drei von diesen Zahlen sind zusammen und (..) auf jeden Fall es könnte sein, weil es drei Zahlen sind, weil wenn es vier sind, dann glaub ich geht das nicht.
18	I	Das wissen wir nicht. Wir bleiben bei drei erst mal.
19	L	Okay, dann würd ich sagen, erst mal weil es drei Zahlen sind und drei ist sozusagen durch 3 teilbar, ist 1 und dann würd ich sagen, zum Beispiel die 1 ist das Ergebnis, ähm *(24 Sek. Pause)*. Ja, es könnte auch sein, weil alle Zahlen, wenn man die addiert, die sind dann sozusagen immer im Dreierabstand. 6, 9, 15 und 18 *(zeigt auf ihre vorherigen Rechnungen)* sind immer im Dreierabstand.
20	I	(...) Ja.
21	L	Ich hätte jetzt, naja ich weiß nicht so genau, auf jeden Fall sind das, das hat alles irgendwie mit drei zu tun. Also das sind drei Zahlen in einer Reihe sag ich mal, und diese Ergebnisse haben immer einen Dreierabstand, die sind durch drei teilbar.
22	I	Warum? Das ist die Frage.
23	L	Ja, ich weiß.
24	I	Das sieht so aus, ja. Da liegen hier noch Hilfen, also Quadrate und n's. Vielleicht kannst du gucken, ob du irgendwas davon nimmst, um zu belegen, warum das so sein muss.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.8 – ZAHLENSUMME - Laura – Fortsetzung

25	L	*(Greift nach den quadratischen Plättchen und legt drei Gruppen nebeneinander auf den Tisch: eine Gruppe mit einem, die andere mit zwei und die letzte mit drei Plättchen. Die jeweilige Anzahl der Plättchen stellt die entsprechende Zahl dar)* . So, 1, 2 und 3, *(zählt die Plättchen durch)* sind 6 zusammen und die geht durch 3. Wenn man jetzt die Quadrate alle zusammen nimmt, dann sind das 6 Stück *(schiebt alle 6 Plättchen zu einer 6er-Gruppe zusammen)*. Mmm, 2, 3 und dann die 4 *(legt die Plättchen der 6er-Gruppe so um, dass 3 Gruppen entstehen: eine mit zwei, eine mit drei Plättchen und eine Gruppe mit dem übrig gebliebenen sechsten Plättchen. Laura holt drei neue Plättchen aus dem Vorrat und legt diese zu dem letzten Plättchen dazu, sodass eine Gruppe aus 4 Plättchen entsteht)*. Und wenn man das jetzt bei den Quadraten sieht, hat es wieder, also weil wenn man zuerst 1, dann 2, dann 3 nimmt (*zieht die einzelnen Plättchen wieder auseinander und zur Ausgangsdarstellung der 1, 2 und 3 zusammen; hat am Schluss die zuvor neu hinzugekommenen drei Plättchen übrig und schiebt diese drei zur Seite)*. Hier die 3 Quadrate *(zeigt auf die beiseite geschobenen drei Plättchen)*, bis zur nächsten Zahl, könnte sein, dass man sozusagen, halt deswegen, weil man immer 3 dazuzählen muss. Wenn man an die letzte Zahl und an die vordere (..) Wenn man jetzt Quadrate hat, tut man einen dazu (*schiebt von der zweiten Gruppe, bestehend aus zwei Plättchen, ein Plättchen zur ersten Gruppe. Nun liegen in der ersten Gruppe zwei Plättchen nebeneinander und in der zweiten Gruppe ist nur ein Plättchen übrig)*, an die zweite zwei *(trennt von der dritten Gruppe, bestehend aus drei Plättchen, zwei Plättchen ab und schiebt sie an die zweite Gruppe. Nun liegen in der zweiten Gruppe drei Plättchen nebeneinander und in der dritten Gruppe ist ein Plättchen übrig)* und an die letzte führt man dann drei dran. *(Legt an die dritte Gruppe, bestehend aus einem Plättchen, drei neue Plättchen aus dem Vorrat hinzu. Nun liegen in der dritten Gruppe vier Plättchen nebeneinander. Die drei Gruppen stellen nun wieder die Zahlen 2, 3 und 4 dar)*. Dann kommt man auf das nächste.
26	I	Interessant. Und wie geht es weiter?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.8 – ZAHLENSUMME - Laura – Fortsetzung

27	L	Weiter geht es, dann muss man noch mal einen *(schiebt ein Plättchen aus der zweiten Gruppe, bestehend aus drei Plättchen, an die beiden Plättchen der ersten Gruppe)* dann hat man hier vorne drei. Dann muss man da noch einen dazutun *(fügt zu der zweiten Gruppe ein Plättchen aus der dritten Gruppe, bestehend aus vier Plättchen, hinzu)*, dann hat man da drei, dann muss man da zwei dazu tun *(fügt der zweiten Figur ein weiteres Plättchen aus der dritten Gruppe hinzu; nun bleiben in der letzten Gruppe nur noch zwei Plättchen übrig)* und dann muss man wieder drei nehmen und da dran tun sozusagen *(fügt der dritten Gruppe drei neue Plättchen aus dem Vorrat hinzu)*.
28	I	Aha. Kannst du das irgendwie allgemein formulieren, mit n's vielleicht? Das ist eine sehr interessante Idee, was du jetzt gerade erzählt hast. Funktioniert doch.
29	L	Ähm, mit n, da muss ich überlegen *(6 Sek. Pause)* die Zahlen, da muss man bei dem ersten muss man n plus 1, dann n plus 2 und hätte ich jetzt eins dann $n+3$.
30	I	Ja, schreib das auf, ich habe leider diese Kärtchen nicht.
31	L	*(Schreibt die Terme $n+1$, $n+2$, $n+3$ nebeneinander)* Also dann kann man da n plus 1, das sind 2, dann n plus 2 mmm, das geht dann aber gar nicht, das sind dann 4, geht dann doch nicht, muss ich doch noch mal gucken (.)
32	I	Doch, versuch da zu gucken, was dann da raus kommt.
33	L	Doch geht. Dann müsste man alles plus 1 machen, dann
34	I	Also, was, was ist das n plus 1, n plus 2, n plus 3, also das hab ich
35	L	Ähm, das ist zum Beispiel, also fang ich jetzt mal mit 5 an, dann hat man die, n ist dann die 4, von dem letzten.
36	I	Schreib das auf, also wenn du möchtest kann ich dir die farbigen Stifte geben *(gibt L farbige Stifte)*.
37	L	Also n, dann mach ich einen Pfeil nach unten, ist 4 *(schreibt einen Pfeil sowie $4+1$ und 5 unter den Term $n+1$)* sind 5. Dann n ist da dann auch die 4 plus 2 sind 6 *(schreibt einen Pfeil sowie $4+2$ und 6 unter den Term $n+2$)*. Und hier ist meinetwegen n ist auch 4 plus 3 *(schreibt einen Pfeil sowie $4+3$ und 7 unter den Term $n+3$)* ist 7 und die muss man dann plus rechnen *(schreibt $5+6+7=18$)* da kommt da dann 18 raus.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.8 – ZAHLENSUMME - Laura – Fortsetzung

38	I	Ja, stark. Und wenn du jetzt deinen Term betrachtest da oben, n plus 1 plus n plus 2 plus n plus 3, also ohne ein Beispiel jetzt zu nehmen, also mit dem Beispiel das war klar, aber jetzt allgemein mit n, wie wird das funktionieren mit n plus 1 plus n plus 2 plus n plus 3, wenn wir das zusammen addieren. Was käme dann raus?
39	L	Wenn ich jetzt n plus 1, das sind dann 4.
40	I	Nee, ohne 4, also ohne Zahl jetzt. n plus 1 plus n plus 2 plus n plus 3. Können wir das addieren? Irgendwie?
41	L	Wie, zusammenbringen so?
42	I	Ja.
43	L	Ähm, mmm, könnte vielleicht das in Klammern n plus 1 plus, also Klammer zu, plus in Klammern n plus 1 und dann könnte man es auch mit ner eckigen Klammer machen.
44	I	Ja, kann man machen. Aber wenn du so addierst, kannst du hier was zusammenzählen?
45	L	Ja, diese beiden und die kann ich auch zusammenzählen *(zeigt auf die Zeile mit nebeneinander stehenden* $n+1$, $n+2$ *und* $n+3$*).*
46	I	Was kommt raus?
47	L	Ähm, 3, sag ich mal n 3, ich weiß jetzt nicht genau, wie man mit n rechnet, dann müsste jetzt, wenn ich das, 3 vielleicht, man weiß ja nicht, welche Zahl das ist, bei n, das ist das Problem.
48	I	Ja, aber 3 Stück sozusagen. Und wenn du eine Zahl hättest wie würdest du das schreiben? Wenn n 4 wäre.
49	L	Dann würde ich eine eckige Klammer, also nen Term so vielleicht. Soll ich aufschreiben?
50	I	Ja, unten.
51	L	Okay. Dann würde ich eine eckige Klammer, dann ne runde, dann würde ich hier 4 plus 1, runde Klammer zu, und das dann plus n, ach, ja oder? Ja, in Klammer n plus 2, Klammer zu, eckige Klammer zu und das dann noch plus n plus 3 *(schreibt dabei* $[(4+1)+(n+2)]+n+3$).
52	I	Mmh, okay. Super, vielen Dank.

Tabelle B.9: ZAHLENSUMME - Michael

I – Interviewerin; M – Michael		
1	M	Wenn man jetzt 5, 6 und 7 nimmt. 5 und 6 sind 11 und dann plus 7 sind 18 und 18 geht durch 3.
2	I	Ja.
3	M	Ja. (...) dann kann man jetzt die 5, die 6 und die 7 *(greift nach den drei Zetteln und legt sie nebeneinander auf den Tisch)*, dann rechnet man 5 und 6 sind 11, und dann noch plus 7 sind dann 18.
4	I	Ja, das stimmt.
5	M	Und dann 18 kann man durch 3 teilen.
6	I	Mmh, (..) richtig.
7	M	Ja, schreib ich dann mal auf: 5 plus 6 plus 7 gleich 18 und 18 durch 3 gleich 6 *(schreibt dies auf)*, also ist dann durch 3 teilbar.
8	I	Ja.
9	M	Und dann kommt 6 daraus. (..) Ja, so mein ich das jetzt.
10	I	Gut.
11	M	Vielleicht find ich ja noch eine *(12 Sek. Pause)* da hab ich noch eine gefunden.
12	I	Ja?
13	M	Ich glaub, das war, ja das waren die. Die 12, die 13 und die 14 *(greift nach den Zetteln und legt sie nebeneinander auf den Tisch)* 12 und 13 sind nämlich 25 und plus 14 sind 39, und 39 durch 3 sind 13.
14	I	Ja.
15	M	Schreib ich dann auch auf. 12 plus 13 plus 14 gleich 39. 39 durch 3 gleich 13 *(schreibt dies auf sein Blatt)*. Also, das ist auch durch 3 teilbar. (..) geht noch eine? (...) Ja, da hab ich noch eine.
16	I	Ja?
17	M	Die 0, dann die 1, dann die 2 *(legt die drei Zettel nebeneinander)*.
18	I	Ja, das stimmt.
19	M	Sind dann 3 und 3 durch 3 sind 1.
20	I	Ja.
21	M	Schreib ich auch auf. Null plus 1 plus 2 gleich 3, 3 durch 3 gleich 1 *(schreibt dies auf)*. *(17 Sek. Pause)* Ich nehme jetzt 8, 9 und 10, nee das, also man kann 8, 9 und 10 nicht nehmen, weil das 27 sind.
22	I	Und was ist mit 27?
23	M	27 kann man nicht durch 3 teilen.
24	I	Meinst du?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.9 – ZAHLENSUMME - Michael – Fortsetzung

25	M	Wenn man jetzt 3, also 5 mal 3 rechnet sind schon 15 und dann kann man direkt, nee doch, das sind dann 9. 8, 9, 10 das sind dann 18, nee 17, ja das geht auch *(schreibt* $8 + 9 + 10 = 27$*,* $27 : 3 = 9$*)*. Ja (...) soll ich noch eine machen? (.) kann ich ja noch eine versuchen *(10 Sek. Pause)*.
26	I	Wie du möchtest.
27	M	*(6 Sek. Pause)* Hab ich direkt noch eine.
28	I	Ja?
29	M	Wir waren ja bei der 5, und dann noch 3 *(legt 3, 4 und 5 nebeneinander)*, sind dann 7 und 5 sind 12.
30	I	Geht auch, ja?
31	M	Ja. *(schreibt* $3 + 4 + 5 = 12$*,* $12 : 3 = 4$*)* sind dann 4. Ja *(6 Sek. Pause)* Ja, ich glaub das reicht, oder?
32	I	Wofür reicht das?
33	M	Also, die Aufgaben.
34	I	Mmh, und was meinst du, funktioniert das immer so, bei drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen?
35	M	Also, bei jeder nicht. Vielleicht, man kann jetzt mal die (..) mmm, was kann man als Beispiel nehmen, man jetzt mal das hier nehmen *(legt 13, 14 und 15 nebeneinander)* 13, 14, 27 und 15 (.) Geht irgendwie auch.
36	I	Was kommt raus?
37	M	42
38	I	Und wenn du durch 3 teilst?
39	M	Sind dann *(5 Sek. Pause)* 14.
40	I	Aha, okay.
41	M	Ja *(schreibt* $13 + 14 + 15 = 42$*,* $42 : 3 = 14$*)*, geht. Vielleicht klappt das bei 9, 10 und 11 nicht *(legt 9, 10 und 11 nebeneinander)*. 19 (..) Oh, das geht auch, das geht ja irgendwie alles! 8, 9, 10. 17, nee die hatte ich ja schon. Vielleicht nehm ich mal die 1, 2, 3 *(legt die 1, 2 und 3 nebeneinander)*. Sind (.) ja, das geht auch. Das ist unfair! *(legt 3, 4 und 5 aneinander)* 7. Nein, das geht auch!
42	I	Wieso sagtest du unfair? Willst du, dass es nicht funktioniert?
43	M	Ja, das ist, das geht irgendwie so gut wie bei jeder Zahl. Ich glaub sogar, dass das bei jeder geht. Vielleicht, wenn man jetzt mal 57 (..) plus 58 und dann plus 59.
44	I	Schreibs auf.
45	M	Muss ich erstmal rechnen. 57 plus 58 plus 59 *(schreibt dabei)* sind dann 100, 150, dann nehm ich noch die 7 plus 8 sind dann 15 und 9, 124, das geht auch. (..) oder? Hey, das geht nicht. (...)
46	I	Okay, 50, 50 und 50 sind?

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.9 – ZAHLENSUMME - Michael – Fortsetzung

47	M	150, ach da kommt doch nicht 124, da kommt 174. (..) geht das? (...) das geht glaub ich (...) nicht. Wenn man jetzt 30, also 3 mal
48	I	Moment, also erstmal, was kommt als Summe raus?
49	M	174 kommt raus.
50	I	Schreibs auf und ich prüfe dann ganz schnell.
51	M	*(schreibt = 174)* 174 und dann 174 durch 3 *(schreibt dies auf)* könnte dann eigentlich (..) weil man kann ja auch nicht 64 durch 3.
52	I	Moment, teile durch.
53	M	Weil das ist ja, die Dreierreihe geht nicht bis auf, geht ja nicht genau auf die 100, also kann man dann von der 74, 10 abziehen, dann hat man 64 *(5 Sek. Pause)*.
54	I	Teile durch 3 erstmal ganz ordentlich, also 174 geteilt durch 3.
55	M	Also, 130 durch 3 *(7 Sek. Pause)* mmm (7 Sek. Pause) ja 120 durch 3, das ist ja, man kann jetzt einfach nur die Dreierreihe bis (..) 20 denken, dann kann man es auch schon herausfinden, weil immer 3, dann 2 mal 3 und so, und wenn man jetzt bei der (...) 120 angekommen ist, dann weiß man auch, dass 120 durch 3 teilbar ist und das sind dann 40 (..) und dann sind noch 54 da. (..) Und die 54, da kann man vielleicht (.) 30, 42, *(rechnet vor sich hin)*
56	I	Okay, ich helfe dir, weil es geht uns jetzt nicht darum, dass du, also, versuch es mit 5 erstmal. Also ich tippe auf 58.
57	M	Ja, eigentlich geht das nicht.
58	I	Stimmt das?
59	M	*(20 Sek. Pause)* Also als Ergebnis?
60	I	Mmh.
61	M	Ähm, 140 geht auch schon nicht. 150 kann man auch durch 3 das sind dann (.) 50, und dann bei der 4 (...) dann hat man 153, dann rechnet man einfach noch 30 dazu (..) doch das geht *(5 Sek. Pause)* weil wenn man dann die 150, also bei der *(unverständlich)*, also *(rechnet leise vor sich hin)*.
62	I	Was prüfst du gerade?
63	M	Also, ich prüf gerade, was da jetzt nochmal raus kommt. Man rechnet einfach, ist einfach bei 180, dann hat man 60 und dann kann man 2 mal 3 da abziehen, dann kommt 58 raus.
64	I	Aha, okay.
65	M	*(schreibt = 58)* Also mein ich, das geht doch mit jeder Zahl.
66	I	Ja, das sieht so aus.
67	M	Ja.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle B.9 – ZAHLENSUMME - Michael – Fortsetzung

68	I	Aber wie können wir sicher sein, dass es wirklich immer so funktioniert? Vielleicht kannst du allgemein, etwa hier mit n's begründen oder mit Quadraten, die für 1, 2, 3 und so weiter stehen?
69	M	Mmm (..) Wie kann man das machen? *(30 Sek. Pause)* Mir fällt nichts ein, wie man das machen kann *(5 Sek. Pause)*.
70	I	Was sagst du?
71	M	Mir fällt nichts ein.
72	I	Ja, also muss nicht sein. Okay, dann bekommst du eine andere Aufgabe einfach, okay?

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur verfasst habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichen Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, 27. Juni 2010

(Tatjana Berlin)